

УДК 629.78.027.7:539.371

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В МОДЕЛИ УГЛОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СПИРАЛЬНОЙ ПРУЖИННОЙ ЛЕНТЫ АМОРТИЗАТОРА СТЫКОВОЧНОГО МЕХАНИЗМА

© 2018 г. Рассказов Я.В., Яскевич А.В.

Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва (РКК «Энергия»)  
Ул. Ленина, 4А, г. Королёв, Московская обл., Российская Федерация, 141070, e-mail: post@rsce.ru

*Заданные свойства демпфирования перспективных стыковочных механизмов космических аппаратов могут быть обеспечены применением элементов амортизации с использованием спиральных ленточных пружин с нелинейной характеристикой жесткости. Существующие приближенные инженерные методики позволяют рассчитать отдельные параметры спиральных пружин постоянной ширины, работающих только в режиме часового механизма, когда момент сопротивления на всем угловом ходе близок к постоянному. Требуемая нелинейная характеристика жесткости может быть реализована только при использовании спиральной пружинной ленты переменной ширины. Для описания формы такой пружинной ленты в данной работе предлагается использовать новые, цилиндрические конечные элементы. Рассматривается алгоритм расчета деформации пружины крутящим моментом. Изменение величины этого момента позволяет определить характеристику жесткости. Описанная модель и алгоритм расчета деформаций ленточной спиральной пружины являются основой для анализа и синтеза параметров пружинных элементов амортизации перспективных стыковочных механизмов.*

**Ключевые слова:** стыковочный механизм космического аппарата, спиральная ленточная пружина, цилиндрический конечный элемент, численный метод расчета деформаций.

## USING CYLINDRICAL FINITE ELEMENTS IN THE SPIRAL SPRING TAPE ANGULAR DEFORMATION MODEL OF DOCKING MECHANISM DAMPER

Rasskazov Ya.V., Yaskевич A.V.

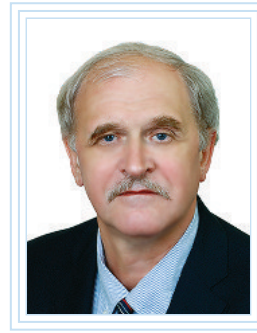
S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia (RSC Energia)  
4A Lenin str., Korolev, Moscow region, 141070, Russian Federation, e-mail: post@rsce.ru

*Specified damping features of advanced spacecraft docking mechanisms can be realized using attenuation elements based on spiral tape springs with nonlinear stiffness behavior. The existing approximate engineering methods allow to calculate certain parameters of constant-width spiral springs operating only in a clockwork mode, when resistance torque is close to constant on the whole range of angular movement. The required nonlinear stiffness behavior can be realized only by using a width-variable tape spring. New cylindrical finite elements are proposed in this paper for describing a shape of such tape spring. The calculating algorithm for spring deformation under torque is considered. A variation of the torque value makes it possible to determine the spring stiffness behavior. The described model and deformation calculating algorithm for the spiral tape-spring form the basis for analysis and synthesis of spring attenuation elements for future docking mechanisms.*

**Key words:** spacecraft docking mechanism, spiral tape spring, cylindrical finite element, numerical method of deformation calculation.



**РАССКАЗОВ Я.В.**



**ЯСКЕВИЧ А.В.**

РАССКАЗОВ Ярослав Владимирович — аспирант, инженер-программист 2 категории РКК «Энергия», e-mail: [yarasskazov@rsce.ru](mailto:yarasskazov@rsce.ru)  
 RASSKAZOV Yaroslav Vladimirovich — Post-graduate, Software engineer 2 category at RSC Energia, e-mail: [yarasskazov@rsce.ru](mailto:yarasskazov@rsce.ru)

ЯСКЕВИЧ Андрей Владимирович — кандидат технических наук, начальник отдела РКК «Энергия», e-mail: [andrey.yaskevich@rsce.ru](mailto:andrey.yaskevich@rsce.ru)  
 YASKEVICH Andrey Vladimirovich — Candidate of Science (Engineering), Head of Department at RSC Energia, e-mail: [andrey.yaskevich@rsce.ru](mailto:andrey.yaskevich@rsce.ru)

## Введение

В отечественных стыковочных механизмах (СтМ) для демпфирования кинетической энергии сближения космических аппаратов (КА) используются простые и надежные устройства — пружинные механизмы (ПМ), электромагнитные демпферы, фрикционные тормозы [1]. В конструкции ПМ традиционно применялись пружинные ленты (ПЛ) с постоянными толщиной и шириной, а также моментом сопротивления, мало изменяющимся по линейному закону в рабочем диапазоне угловых перемещений. Это объясняется в первую очередь тем, что для расчета конструкции ПМ такого класса, так называемых «пружинных двигателей», существуют хорошо отработанные инженерные методики, хотя и приближенные, но основанные на экспериментальных данных [2–4]. При проектировании перспективного СтМ возникла необходимость использования ПМ с изменяющейся нелинейно по заданному закону характеристикой жесткости, которая может быть обеспечена переменной шириной ПЛ, работающей в режиме нагружения, отличным от часового механизма. Аналитические или приближенные инженерные методы расчета деформации таких сложных тел отсутствуют. ПЛ, вследствие своей симметрии относительно средней линии, может быть представлена плоской кривой, форма которой представляется конечными элементами (КЭ), например, в виде деформируемых стержней [5–7]. Однако, строго говоря, даже малые сегменты ПЛ обладают начальной

и изменяющейся под нагрузкой кривизной. Поэтому в данной работе для описания угловых деформаций такого тела введены новые, цилиндрические КЭ, деформация которых, в отличие от стержневых, описывается в угловых координатах. Представлены математическая модель и алгоритм расчета деформации ПЛ, которые являются основой для последующего анализа и синтеза ПМ с заданными характеристиками жесткости.

## 1. Цилиндрический конечный элемент

Для разработки модели деформации ПЛ вводится новый, цилиндрический КЭ — сегмент тонкостенного цилиндра среднего радиуса  $R$ , имеющий постоянные высоту, ширину и толщину. Каждый  $i$ -й элемент определяется следующими параметрами (рис. 1):

- координатами  $P_i = (x_i, y_i)$  или радиус-вектором  $\mathbf{r}_{P_i}$  его левого жестко заделанного конца в декартовой системе  $ХОУ$ , используемой для описания деформаций всей ПЛ;
- радиусом  $R_i$ , характеризующим кривизну сегмента тонкостенного цилиндра с единичным вектором  $\mathbf{e}_{n,i}$ ;
- углом  $\vartheta_i$  между осью  $X$  и единичным вектором касательной  $\mathbf{e}_{t,i}$  к окружности среднего сечения цилиндра в точке  $P_i = (x_i, y_i)$ ;
- длиной  $\Delta l$  хорды цилиндрического сегмента, определяющей точность конечно-элементного представления ПЛ;
- высотой  $b_i$  цилиндра, симметричного относительно его средней линии;

- толщиной  $h$  стенки цилиндра КЭ (на рисунке не указана);
- угловой жесткостью КЭ  $H_i = EJ_i$ , где  $E$  — модуль Юнга;  $J_i$  — осевой момент инерции,  $J_i = bh^3/12$ .

Точка  $C_{R,i}$  является проекцией оси цилиндра на плоскость  $XOY$ . На правый конец цилиндрического КЭ может действовать момент кручения  $M$ . В настоящей методике возможные контакты витков ПЛ не учитываются.

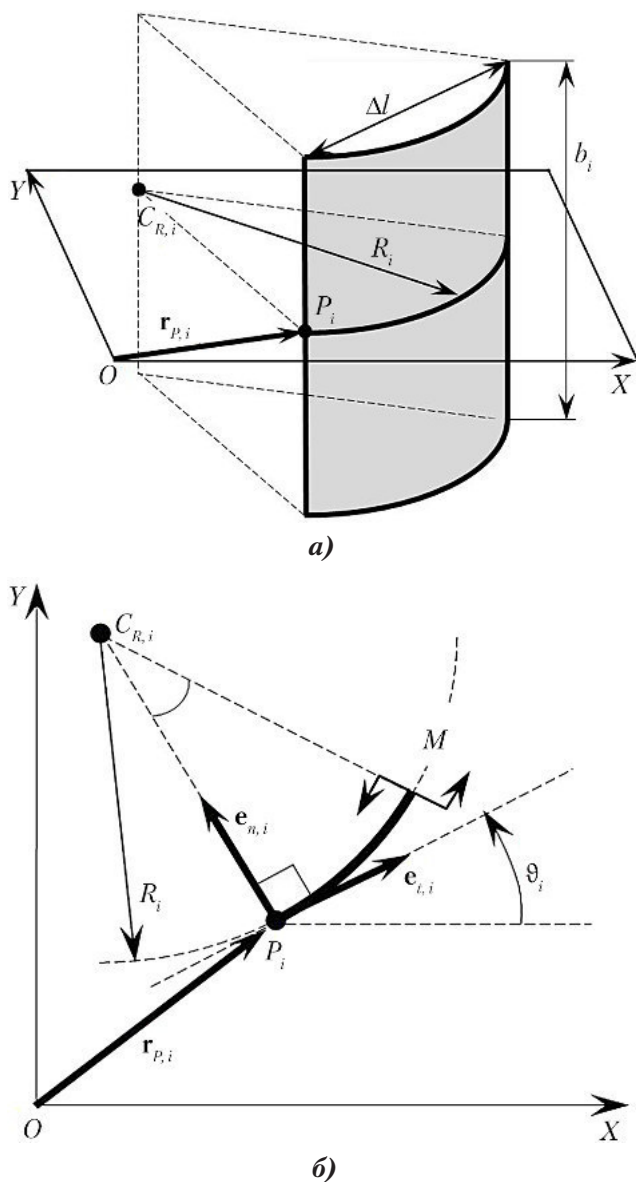


Рис. 1. Цилиндрический конечный элемент (а) и его поперечное сечение (б)

## 2. Определение геометрии недеформированной пружинной ленты

Поперечное сечение пространственной ПЛ постоянной или переменной ширины может быть представлено плоской спиральной кривой, расположенной в декартовой плоскости с системой координат  $XOY$ .

Предполагается, что ПЛ закручена против часовой стрелки (рис. 2), жестко заделана по ее внутренней границе (на плоской кривой это начальная точка  $B$ ), а на ее внешнюю границу (на плоской спиральной кривой — точка  $E$ ) может действовать внешний крутящий момент. С заданной линейной точностью  $\Delta l$  спиральная кривая представляется совокупностью  $m$  точек, которые при отсутствии внешней нагрузки обозначаются как  $P_i^{(0)}$ , а при действии крутящего момента,  $k$ -е значение которого равно  $M^{(k)}$ , — как  $P_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Точка  $P_1^{(0)}$  совпадает с точкой  $B$ , и ее положение в плоскости  $XOY$  неизменно. Координаты  $(x_i^{(0)}, y_i^{(0)})$  точек  $P_i^{(0)}$  при отсутствии внешней нагрузки считаются известными, способ их определения рассмотрен ниже в разд. 4.

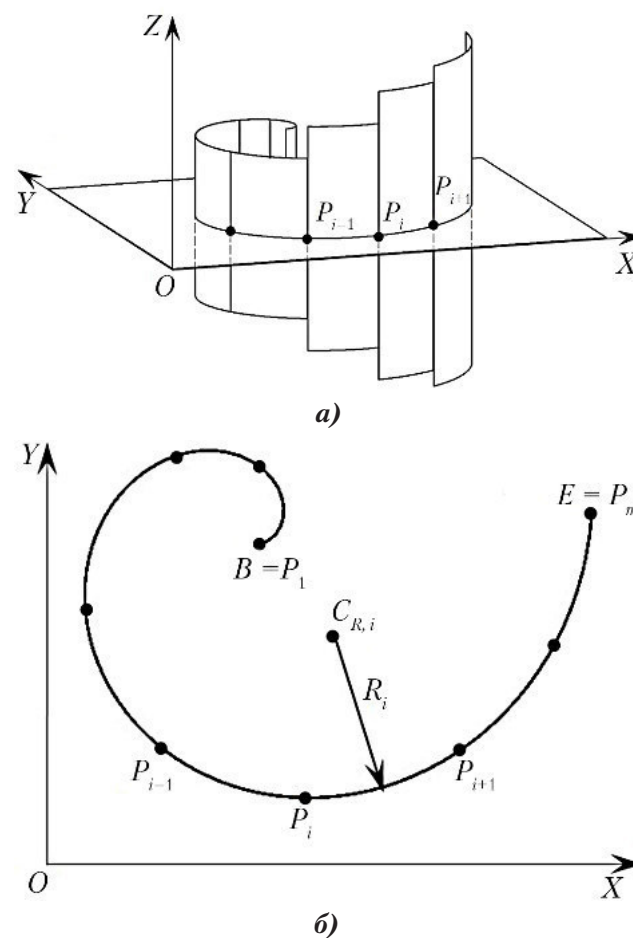


Рис. 2. Представление пружинной ленты цилиндрическими конечными элементами (а) и ее поперечное сечение (б)

Для расчета деформации ПЛ необходимо определить начальный радиус  $R_i^{(0)}$  для каждого  $i$ -го цилиндрического КЭ. Через три точки  $P_{i-1}^{(0)} = (x_{i-1}^{(0)}, y_{i-1}^{(0)})$ ;  $P_i^{(0)} = (x_i^{(0)}, y_i^{(0)})$ ;  $P_{i+1}^{(0)} = (x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)})$ , последовательно размещенные на спиральной кривой ПЛ, можно провести окружность, притом только одну (рис. 3).

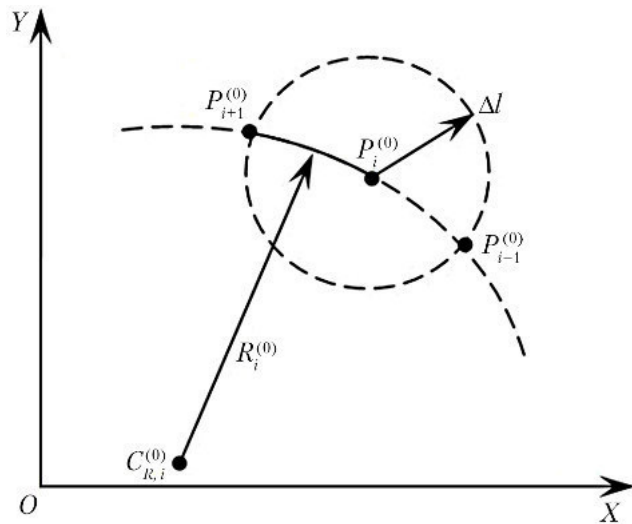


Рис. 3. Радиус ненагруженного цилиндрического элемента

Координаты центра окружности  $C_{R,i}^{(0)} = (x_{r,i}^{(0)}, y_{r,i}^{(0)})$  могут быть получены решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} (x_{r,i}^{(0)} - x_{i+1}^{(0)})^2 + (y_{r,i}^{(0)} - y_{i+1}^{(0)})^2 = \\ = (x_{r,i}^{(0)} - x_i^{(0)})^2 + (y_{r,i}^{(0)} - y_i^{(0)})^2, \\ (x_{r,i}^{(0)} - x_{i-1}^{(0)})^2 + (y_{r,i}^{(0)} - y_{i-1}^{(0)})^2 = \\ = (x_{r,i}^{(0)} - x_i^{(0)})^2 + (y_{r,i}^{(0)} - y_i^{(0)})^2. \end{cases}$$

Радиус окружности равен расстоянию между точками  $P_i^{(0)}$  и  $C_{R,i}^{(0)}$ , т. е.

$$R_i^{(0)} = \sqrt{(x_i^{(0)} - x_{r,i}^{(0)})^2 + (y_i^{(0)} - y_{r,i}^{(0)})^2}.$$

Далее принимается, что он является радиусом  $i$ -го цилиндрического КЭ с начальной точкой  $P_i^{(0)}$  и с сечением в виде сегмента от точки  $P_i^{(0)}$  до  $P_{i+1}^{(0)}$  ПЛ при отсутствии внешнего момента. Он является основным параметром расчетной схемы и должен быть вычислен для  $i \in 2, \dots, (m-1)$ . Для  $i = 1$  принимается  $R_1^{(0)} = R_2^{(0)}$ . Последняя точка  $P_m^{(0)}$  ПЛ не образует КЭ, поэтому расчет начального радиуса закругления в ней не требуется. После определения радиусов начальной кривизны КЭ однократно вычисляется единичный вектор касательной  $\mathbf{e}_{t,i}$  к ПЛ в точке  $P_i^{(0)}$ :  $\mathbf{e}_{t,i} = [\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i]^T$ .

### 3. Расчет угловых деформаций пружинной ленты и ее формы в декартовых координатах

Прикладываемый на внешней границе ПЛ (в точке  $E$  спиральной кривой) внешний крутящий момент  $M^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , действует во всех ее сечениях. Поэтому угловая деформация  $\Delta\theta_i$  каждого цилиндрического  $i$ -го КЭ равна

$$\Delta\theta_i = \theta_i^{(k)} - \theta_i^{(0)} = \frac{M^{(k)}}{H_i},$$

где  $\theta_i^{(0)}$  – начальная кривизна при отсутствии изгибающего момента;  $\theta_i^{(k)}$  – кривизна после достижения равновесного состояния под действием момента  $M^{(k)}$ .

С учетом того, что  $\theta_i^{(0)} = 1/R_i^{(0)}$  и  $\theta_i^{(k)} = 1/R_i^{(k)}$ , уравнение деформации преобразуется к виду

$$\frac{1}{R_i^{(k)}} - \frac{1}{R_i^{(0)}} = \frac{M^{(k)}}{H_i},$$

который позволяет определить новый радиус цилиндрической поверхности  $i$ -го КЭ, деформированного моментом

$$R_i^{(k)} = \frac{H_i R_i^{(0)}}{M^{(k)} R_i^{(0)} + H_i}. \quad (1)$$

После вычислений новых радиусов для всех КЭ, деформированных под действием момента  $M^{(k)}$ , осуществляется расчет формы спиральной кривой ПЛ в декартовых координатах  $XOY$ . Для этого реализуется следующий алгоритм (рис. 4).

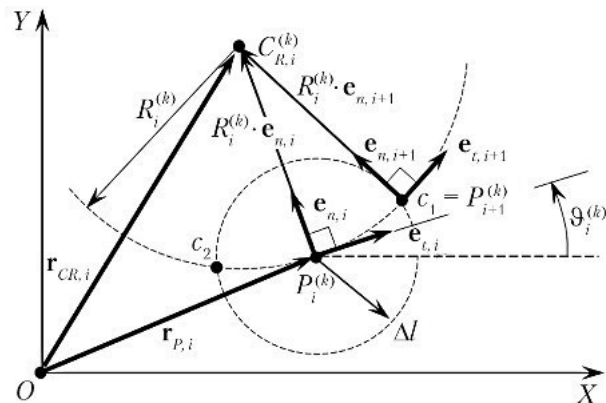


Рис. 4. Последовательное восстановление декартовых координат точек пружинной ленты при заданном моменте  $M^{(k)}$

- 1) Для очередного  $i$ -го КЭ выбирается точка  $P_i^{(k)}$  на спиральной кривой ПЛ, определяемая радиус-вектором  $\mathbf{r}_{P,i}^{(k)}$ ;
- 2) вычисляется радиус-вектор точки  $C_{R,i}^{(k)}$ :  $\mathbf{r}_{C,R,i}^{(k)} = \mathbf{r}_{P,i}^{(k)} + R_i^{(k)} \mathbf{e}_{n,i}$ ;
- 3) определяются радиус-векторы  $\mathbf{r}_{c,1}$  и  $\mathbf{r}_{c,2}$  точек  $c_1$  и  $c_2$  пересечения окружности радиуса  $R_i^{(k)}$  с центром  $C_{R,i}^{(k)}$  и окружности радиуса  $\Delta l$  с центром  $P_i^{(k)}$ ;
- 4) определяется радиус-вектор исходной точки  $P_{i+1}^{(k)}$  следующего,  $(i+1)$ -го КЭ: если  $\mathbf{r}_{c,1} \cdot \mathbf{e}_{t,i} > 0$ , то  $\mathbf{r}_{P,i+1}^{(k)} = \mathbf{r}_{c,1}$ , в противном случае  $\mathbf{r}_{P,i+1}^{(k)} = \mathbf{r}_{c,2}$ ;
- 5) определяется единичный вектор  $\mathbf{e}_{n,i+1} = [e_{n,i+1}^x, e_{n,i+1}^y]^T$  отрезка  $P_{i+1}^{(k)} C_{R,i}^{(k)}$ ;
- 6) из условий  $\mathbf{e}_{t,i+1} \cdot \mathbf{e}_{n,i+1} = 0$  или  $\mathbf{e}_{t,i+1}^x e_{n,i+1}^x + \mathbf{e}_{t,i+1}^y e_{n,i+1}^y = 0$  определяется единичный вектор  $\mathbf{e}_{t,i+1} = [e_{t,i+1}^x, e_{t,i+1}^y]^T$  касательной

к линии пружинной ленты в исходной точке  $P_{i+1}^{(k)}$  следующего  $(i+1)$ -го КЭ (так как  $e_{n,i+1}^x, e_{n,i+1}^y$  известны, то с учетом направления осей  $X$  и  $Y$   $e_{t,i+1}^x = e_{n,i+1}^y$  и  $e_{t,i+1}^y = -e_{n,i+1}^x$ );

7) выбирается следующий  $(i+1)$ -й КЭ и осуществляется переход на п. 2.

#### 4. Подготовка исходных данных для модели пружинной ленты

В качестве исходных данных для модели выбраны следующие параметры:

- толщина ПЛ  $h$ ;
- модуль Юнга  $E$  для материала ПЛ;
- декартовы координаты точек исходной формы ПЛ  $P_i^{(0)}, i = 1, \dots, m$ ;
- ширина ленты  $b_i$  для участков между точками  $P_i^{(0)}$  и  $P_{i+1}^{(0)}, i = 1, \dots, (m - 1)$ .

Характерная спиральная форма ПЛ является результатом технологической операции заневоливания — тугой навивки ленты на технологический вал, радиус которого обычно равен радиусу вала ПМ. При этом напряжения в волокнах ленты превышают предел текучести для материала, что приводит к ее упругопластической деформации. Процедура позволяет существенно снизить максимальные напряжения в волокнах при работе ПМ. Форма спирали, число ее витков зависят от толщины ленты  $h$  и радиуса вала  $R_B$ , а также в большой степени от упругопластических свойств материала ленты [2].

Исходная форма ПЛ может быть определена аналитически с использованием известной методики инженерного расчета [4], а также в результате непосредственных измерений по методике [5]. В последнем случае форма кривой сечения ПЛ предварительно задается вручную для некоторого ограниченного числа  $n$  ее точек, при условии допустимости ее аппроксимации между двумя смежными точками дугой окружности (рис. 5).

Для каждой  $i$ -й точки  $N_i$  определяются расстояние  $s_{N,i}$  по дуге плоской кривой от точки 0, угол  $\vartheta_{N,i}$  между осью  $X$  и направлением вектора касательной  $\mathbf{m}_{\tau,i}$  к плоской кривой и ширина ПЛ  $b_{N,i}$  в этой точке. Для параметров  $s_{N,i}, b_{N,i}$  и  $\vartheta_{N,i}, i = 1, \dots, n$ , должны удовлетворяться условия:  $s_{N,i+1} > s_{N,i}; \vartheta_{N,i+1} > \vartheta_{N,i}; b_{N,i+1} \geq b_{N,i}$ .

В расчетной схеме используется более детальное представление плоской кривой путем разбиения ее на  $m \gg n$  точек. Число  $m = s_{N,n} / \Delta l$  выбирается таким, чтобы хорда  $\Delta l$ , одинаковая для каждого  $j$ -го КЭ, достаточно точно соответствовала длине

его дуги:  $|\Delta l - 2\arcsin(\Delta l / 2R_j^{(0)})R_j^{(0)}| \leq \varepsilon$  (см. рис. 5, б), а ширина ПЛ на протяжении КЭ менялась незначительно:  $b_{j+1} - b_j < \varepsilon$ ;  $\varepsilon$  — погрешность вычислений. Эти условия необходимы для последующего расчета с заданной точностью формы ПЛ в декартовых координатах, несмотря на то, что угловая деформация цилиндрического элемента, в соответствии с выражением (1), не зависит от длины его дуги.

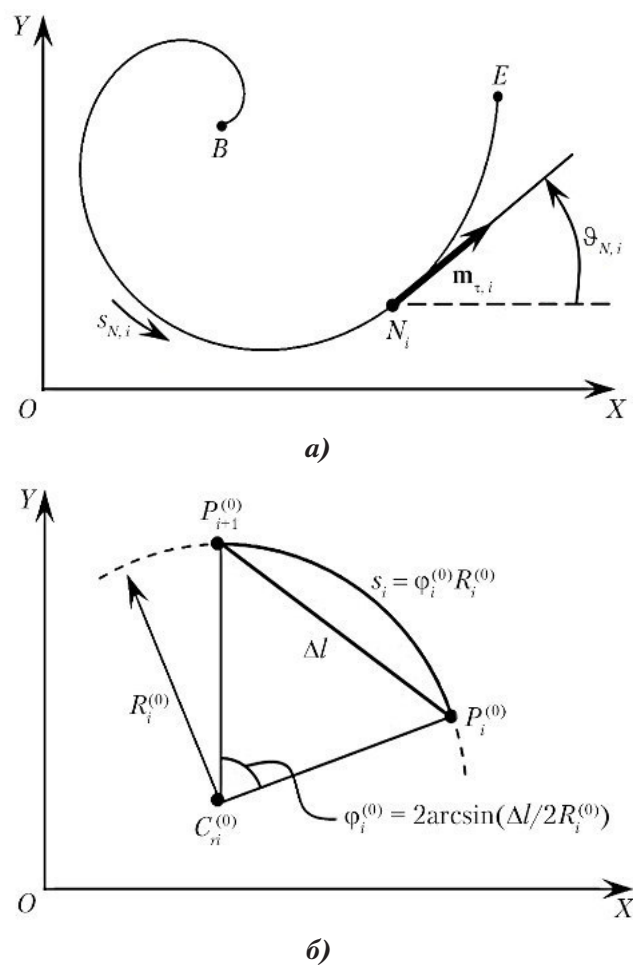


Рис. 5. Определение начальных параметров пружинной ленты: а — непосредственное измерение формы; б — длина дуги  $s_j$ , соответствующая хорде  $\Delta l$

Для  $j$ -го КЭ принимается  $b_j = \text{const}$  и последовательно определяются:

- расстояние от точки  $B$  ленты до точки начала КЭ  $s_j = j\Delta l$ ;
- значение переменной  $i$ , для которого  $s_{N,i} \leq s_j \leq s_{N,i+1}$ ;
- значения  $b_j$  и  $\vartheta_j^{(0)}$  с использованием линейной аппроксимации:

$$b_j = b_{N,i} + (b_{N,i+1} - b_{N,i})(s_j - s_{N,i}) / (s_{N,i+1} - s_{N,i});$$

$$\vartheta_j^{(0)} = \vartheta_{N,i} + (\vartheta_{N,i+1} - \vartheta_{N,i})(s_j - s_{N,i}) / (s_{N,i+1} - s_{N,i}).$$

Координаты точек дискретного модельного представления ПЛ определяются рекуррентно, начиная от точки  $B = (x_0^{(0)}, y_0^{(0)})$ :

$$x_{j+1}^{(0)} = x_j^{(0)} + \cos\vartheta_j^{(0)}\Delta l;$$

$$y_{j+1}^{(0)} = y_j^{(0)} + \sin\vartheta_j^{(0)}\Delta l; j = 1, \dots, (m - 1).$$

### 5. Расчет деформации пружинной ленты стыковочного механизма

Для отработки описанной выше методики был выполнен расчет деформации ПЛ постоянной ширины, используемой в существующих в настоящее время пружинных механизмах (рис. 6).

На рис. 6, а показана фотография реальной ПЛ, на 6, б — ее модель при отсутствии нагружения (данные получены путем

непосредственного измерения формы по методике, изложенной в п. 4), на 6, в — форма ПЛ, деформированной некоторым допустимым (рабочим) моментом. Рис. 6, г показывает результат расчета плотной навивки ПЛ на вал с учетом ее толщины (масштаб изменен). При этом радиус кривизны  $i$ -го КЭ при его деформации  $k$ -м моментом ограничивался условием  $R_i^{(k)} \geq \sqrt{R_B^2 + (i - 1)\Delta l h / \pi}$  [4], определяющим, что КЭ не может деформироваться более, чем до радиуса опоры, состоящей из вала радиусом  $R_B$  и плотно навитых на него ранее уложенных (предыдущих) КЭ. Полученные результаты демонстрируют возможности разработанной методики.

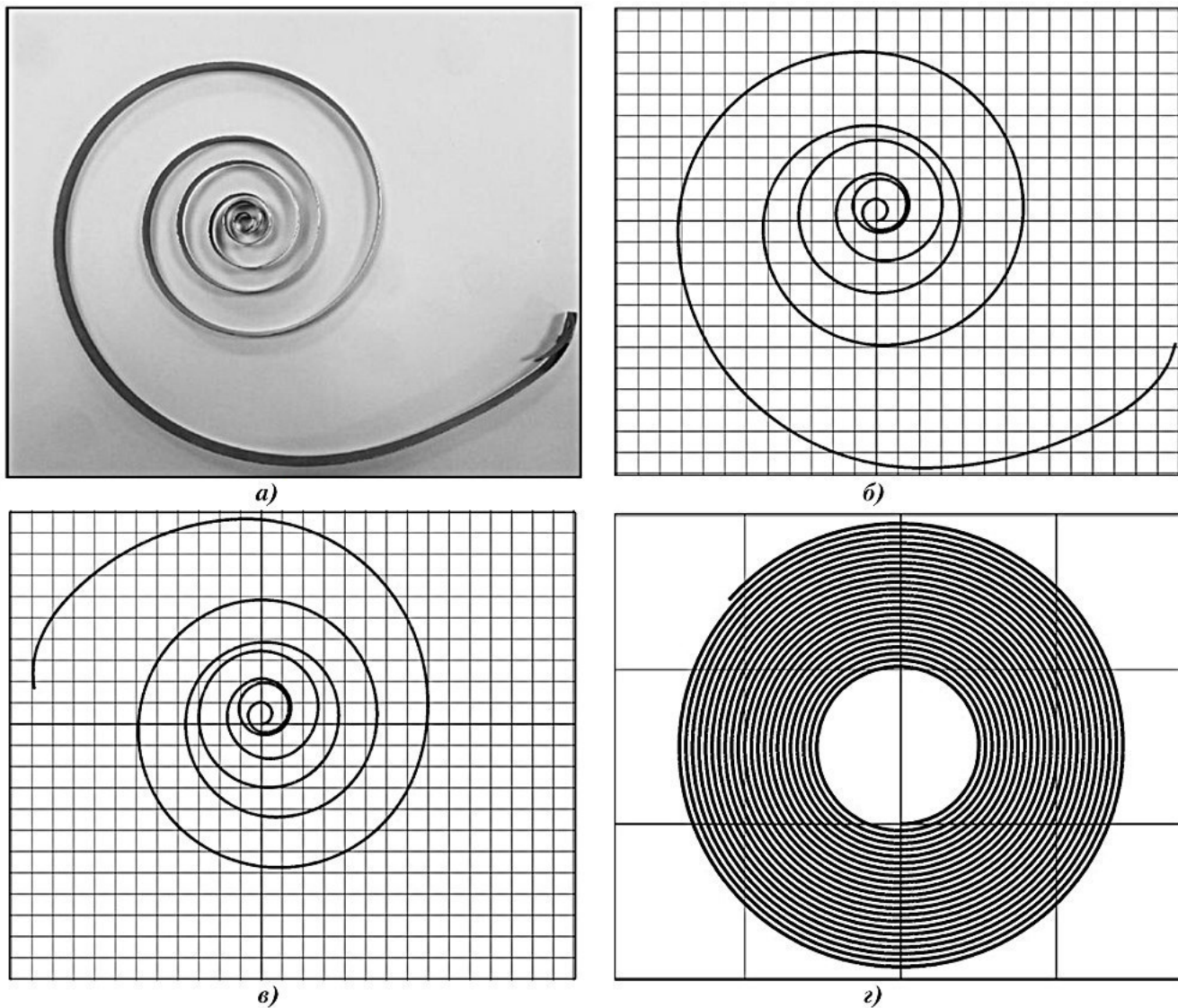


Рис. 6. Расчет деформации пружинной ленты (ПЛ) стыковочного механизма: а — реальная ПЛ; б — модель недеформированной ПЛ; в — форма ПЛ при действии допустимого (рабочего) момента; г — максимально деформированная ПЛ (масштаб изменен)

### Выводы

Разработана методика расчета деформаций пружинной ленты переменной ширины приложенным к ее концу крутящим

моментом. Она основана на использовании новых цилиндрических КЭ, которые соответствуют форме деформируемого тела, т. е. описывают ее угловыми координатами. Это упрощает описание начальной

конфигурации пружинной ленты и алгоритм расчета ее изменения под действием нагрузки.

### Список литературы

1. Сыромятников В.С. Стыковочные устройства космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1984. 216 с.
2. Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. М.: Машиностроение, 1980. 327 с.
3. Анурьев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя / Под ред. Жестковой И.Н. М.: Машиностроение, 2001. Т. 3. 859 с.

4. Гевондян Т.А. Пружинные двигатели. М.: Государственное издательство оборонной промышленности, 1956. 368 с.

5. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 297 с.

6. Belendez T., Neipp C., Belendez A. Numerical and experimental analysis of cantilever beam: a laboratory project to introduce geometric nonlinearity in mechanics of materials // *International Journal of Engineering Education*. 2003. V. 19. № 6. P. 885–892.

7. Артюхин Ю.И. Произвольный изгиб стержня консервативной силой // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 155. Кн. 2. С. 144–157. *Статья поступила в редакцию 07.06.2017 г.*

### Reference

1. Syromyatnikov V.S. *Stykovochnye ustroistva kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft docking assemblies]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1984. 216 p.
2. Ponomarev S.D., Andreeva L.E. *Raschet uprugikh elementov mashin i priborov* [Analysis of elastic elements of machines and instruments]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1980. 327 p.
3. Anur'ev V.I. *Spravochnik konstruktora-mashinostroitelya* [Handbook of mechanical engineering designer]. Ed. by Zhestkova I.N. Moscow, Mashinostroenie publ., 2001. Vol. 3, 859 p.
4. Gevondyan T.A. *Pruzhinnye dvigateli* [Spring motors]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo oboronnoi promyshlennosti publ., 1956. 368 p.
5. Popov E.P. *Teoriya i raschet gibkikh uprugikh sterzhnei* [Theory and analysis of flexible elastic bars]. Moscow, Nauka publ., 1986. 297 p.
6. Belendez T., Neipp C., Belendez A. Numerical and experimental analysis of cantilever beam: a laboratory project to introduce geometric nonlinearity in mechanics of materials. *International Journal of Engineering Education*, 2003, vol. 19, no. 6, pp. 885–892.
7. Artyukhin Yu.I. *Proizvol'nyi izgib sterzhnya konservativnoi siloi. Kn. 2.* [Arbitrary bending of a bar by a conservative force. Book 2]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2013, vol. 155, pp. 144–157.