

УДК 629.78.051.062.2

УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ И РАЗГРУЗКА НАКОПЛЕННОГО КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИОННЫХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ВЫСОКОЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

© 2017 г. Богачев А.В.¹, Воробьева Е.А.¹, Зубов Н.Е.^{1,2}

¹Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва (РКК «Энергия») Ул. Ленина, 4А, г. Королёв, Московская обл., Российская Федерация, 141070, e-mail: post@rsce.ru

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана) 2-я Бауманская ул., 5, г. Москва, Российская Федерация, 105005, e-mail: mail@bmstu.ru

В статье рассматривается динамика углового движения космического аппарата на высокоэллиптической орбите. Разработан алгоритм управления угловым движением космического аппарата и разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата на высокоэллиптической орбите, использующий для этого гравитационный момент. Для построения законов управления ориентацией и разгрузки накопленного кинетического момента космического аппарата применяется метод точного размещения полюсов. Получено численное решение задачи управления ориентацией и разгрузкой кинетического момента космического аппарата на высокоэллиптической орбите по всем трем каналам управления на участке орбиты, свободном от выполнения целевой задачи, в окрестности перигея. Также произведен анализ устойчивости системы линеаризованных дифференциальных уравнений, описывающих динамику поведения космического аппарата на высокоэллиптической орбите.

Ключевые слова: управление ориентацией, разгрузка кинетического момента, инерционные исполнительные органы, высокоэллиптическая орбита, космический аппарат, гравитационный момент, метод точного размещения полюсов.

ATTITUDE CONTROL AND MOMENTUM MANAGEMENT FOR THE SPACECRAFT WITH INERTIAL ACTUATORS ON HIGH-ELLIPTICAL ORBIT

Bogachev A.V.¹, Vorobyeva E.A.¹, Zybov N.E.^{1,2}

¹S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia (RSC Energia) 4A Lenin str., Korolev, Moscow region, 141070, Russian Federation, e-mail: post@rsce.ru

²Bauman Moscow State Technical University (Bauman MSTU) 5 2nd Bauman str., Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: mail@bmstu.ru

The article deals with the dynamics of the angular motion of the spacecraft on the high-elliptical orbit. The attitude control and momentum management algorithm is designed for the spacecraft with inertial actuators on the high-elliptical orbit using gravity gradient torque. Accurate pole placement method is used to develop attitude control and momentum management control laws. A numerical solution is derived for attitude control law and momentum management of the spacecraft on the high-elliptical orbit on all three control channels in the vicinity of the perigee of the orbit. Also, the stability analysis is performed for the linearized differential equations describing the dynamics of the spacecraft on the high-elliptical orbit.

Key word: attitude control, momentum management, inertial actuator, high-elliptic orbit, spacecraft, gravity gradient forces, accurate pole placement method.



БОГАЧЕВ А.В.



ВОРОБЬЕВА Е.А.



ЗУБОВ Н.Е.

БОГАЧЕВ Алексей Викторович — кандидат технических наук, начальник сектора РКК «Энергия», e-mail: alexey.bogachev@rsce.ru

BOGACHEV Alexey Viktorovich — Candidate of Science (Engineering), Head of Subdepartment at RSC Energia, e-mail: alexey.bogachev@rsce.ru

ВОРОБЬЕВА Екатерина Андреевна — инженер-математик РКК «Энергия», e-mail: ekaterina.vorobeva@rsce.ru

VOROBYEVA Ekaterina Andreevna — Engineer-mathematician at RSC Energia, e-mail: ekaterina.vorobeva@rsce.ru

ЗУБОВ Николай Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник РКК «Энергия», декан факультета РКТ МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: nikolay.zubov@rsce.ru

ZUBOV Nikolay Evgenyevich — Doctor of Science (Engineering), Professor, Chief research scientist at RSC Energia, Dean of the Faculty of Rocket and Space Technology of the Bauman MSTU, e-mail: nikolay.zubov@rsce.ru

Введение

В работе рассматривается движение космического аппарата (КА) с инерционными исполнительными органами (ИИО) на высокоэллиптической орбите (ВЭО). Для таких орбит характерно деление на два участка: рабочий (в окрестности апогея) и дежурный (в окрестности перигея). Далее в работе речь будет идти о дежурном участке, на котором осуществляются вспомогательные динамические операции. Одной из таких операций является разгрузка накопленного на ИИО кинетического момента. При насыщении системы ИИО КА применяют различные способы разгрузки накопленного кинетического момента. Обычно управление центром масс КА и разгрузка ИИО автоматических КА производится с использованием ракетных двигателей малой тяги, в т. ч. электроракетных [1]. Естественно, наиболее предпочтительными способами управления кинетическим моментом ИИО являются безрасходные способы, использующие моменты малых сил, действующих на КА [2–4].

Целью данной работы является решение задачи управления ориентацией и разгрузки кинетического момента КА с ИИО на ВЭО по всем трем каналам управления

с использованием гравитационного момента и с применением алгоритма точного размещения полюсов.

Математическая модель КА

Для вывода уравнений, описывающих динамику углового движения КА, введем две системы координат:

- *орбитальная система координат* (ОСК), начало которой совпадает с центром масс КА, ось $OY_{\text{ОСК}}$ направлена вдоль радиуса-вектора, $OX_{\text{ОСК}}$ лежит в плоскости кеплеровой орбиты и составляет с вектором линейной скорости острый угол, $OZ_{\text{ОСК}}$ дополняет систему до правой. Рабочая орбита и оси ОСК, а также два участка, на которые делится орбита: рабочий и дежурный, представлены на рис. 1.

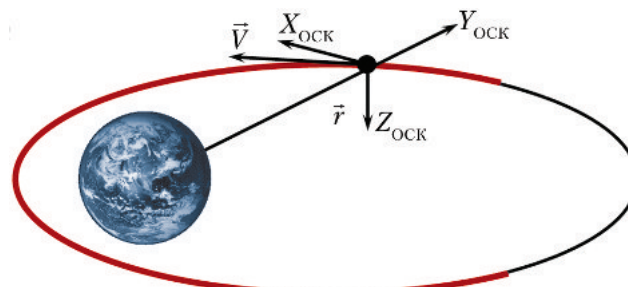


Рис. 1. Рабочая орбита и оси орбитальной системы координат: — дежурный участок; — рабочий участок

• связанная с КА система координат (ССК) с началом в центр масс КА. Для упрощения математических выкладок оси ССК совпадают по направлению с главными центральными осями инерции КА.

Для перехода от ОСК к ССК необходимо выполнить три последовательных вращения (рис. 2). Первое вокруг начального положения оси $OZ_{ССК}$ ($OZ_{ОСК}$) – тангажный разворот на угол θ , второе вокруг промежуточного положения оси $OY_{ССК}$ (OY') – разворот по каналу рыскания на угол ψ и вокруг конечного положения оси $OX_{ССК}$ – разворот по крену на угол γ .

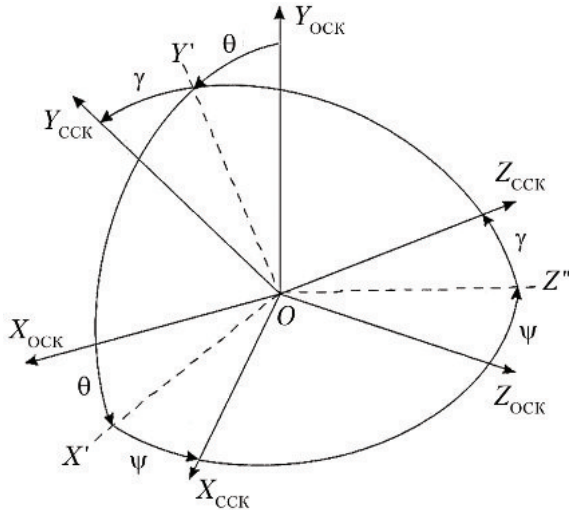


Рис. 2. Взаимное положение осей орбитальной и связанной систем координат

Ниже представлены уравнения, описывающие движение КА около центра масс.

1. Кинематические соотношения в кватернионной форме [5]:

$$2\dot{\Lambda}_{ОСК}^{ССК} = \Lambda_{ОСК}^{ССК} \circ (\omega_{абс})_{ССК} - (\omega_0)_{ОСК} \circ \Lambda_{ОСК}^{ССК}, \quad (1)$$

где $\Lambda_{ОСК}^{ССК}$ – кватернион разворота от ОСК к ориентации, требуемой для разгрузки; $(\omega_{абс})_{ССК}$ – абсолютная угловая скорость в проекции на ССК; $(\omega_0)_{ОСК}$ – орбитальная угловая скорость в проекции на ОСК.

2. Динамические уравнения углового движения КА, несущего вращающиеся массы, при воздействии гравитационного момента [6]:

$$J\dot{\bar{\omega}}_{абс} + \bar{\omega}_{абс} \times J\bar{\omega}_{абс} + \dot{\bar{h}} + \bar{\omega}_{абс} \times \bar{h} = \bar{M}_{grav}, \quad (2)$$

где J – тензор инерции КА; \bar{h} – вектор кинетического момента ИИО; \bar{M}_{grav} – гравитационный момент.

Далее:

- проецируем уравнение (2) на оси ССК;
- предполагаем малыми углы крена и рыскания, а также производные по времени от углов крена, рыскания и тангажа;
- применяем теорему об изменении кинетического момента отдельно к корпусу КА и отдельно к вращающимся элементам конструкции;
- производим замену переменных $\omega_0, \dot{\omega}_0, r$ на переменные и параметры кеплеровой орбиты (эксцентриситетом, истинной, эксцентрической и средней аномалией);
- линеаризуем полученную систему уравнений около углового положения $(0, 0, \theta_0)$.

Таким образом, линеаризованные уравнения углового движения КА при наличии ИИО для эллиптических орбит при учете действия гравитационного момента в случае применения теоремы об изменении кинетического момента [7] в соответствии с работами [8, 9] имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\gamma} &= \left(\frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \right) \left(\frac{G}{r^3} (1 + e \cos v) + 3 \frac{G}{r^3} \cos^2 \theta_0 \right) \gamma - \left(\frac{J_{xx} + J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \right) \sqrt{\frac{G}{r^3} (1 + e \cos v)} \dot{\psi} + \\ &+ \frac{G}{r^3} \left(2e \sin v - 3 \left(\frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \right) \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 + 3 \cos 2\theta_0 \right) \right) \psi - \frac{u_x}{J_{xx}}, \\ \ddot{\psi} &= \left(\frac{J_{xx} - J_{zz}}{J_{yy}} \right) \left(\frac{G}{r^3} (1 + e \cos v) + 3 \frac{G}{r^3} \sin^2 \theta_0 \right) \psi + \left(\frac{J_{xx} + J_{yy} - J_{zz}}{J_{yy}} \right) \sqrt{\frac{G}{r^3} (1 + e \cos v)} \dot{\gamma} - \\ &- \frac{G}{r^3} \left(2e \sin v + 3 \left(\frac{J_{xx} - J_{zz}}{J_{yy}} \right) \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 + 3 \cos 2\theta_0 \right) \right) \gamma - \frac{u_y}{J_{yy}}, \\ \dot{h}_x + \sqrt{\frac{G}{r^3} (1 + e \cos v)} h_y &= u_x, \\ \dot{h}_y - \sqrt{\frac{G}{r^3} (1 + e \cos v)} h_x &= u_y, \\ \ddot{\theta} &= 3\vartheta \frac{G}{r^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \cos 2\theta_0 + \frac{3}{2} \frac{G}{r^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \sin 2\theta_0 - 2 \frac{G}{r^3} e \sin v - \frac{u_z}{J_{zz}}, \\ \dot{h}_z &= u_z \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — главные центральные моменты инерции КА; h_x, h_y, h_z — проекции кинетического момента ИИО на оси связанного базиса; u_x, u_y, u_z — моменты реакции в подшипниках маховиков, через которые осуществляются как управляющее воздействие на корпус КА с целью поддержания его ориентации, так и разгрузка накопленного кинетического момента ИИО; γ, ψ, θ — углы отклонения связанного базиса от орбитального по крену, рысканию и тангажу, соответственно; ϑ — малый угол отклонения от углового положения $(0, 0, \theta_0)$ в канале тангажа, $\vartheta = \theta - \theta_0$; r — радиус-вектор центра масс спутника относительно центра Земли; v — истинная аномалия; e — эксцентриситет орбиты; $G = \mu M$; μ — гравитационная постоянная; M — масса Земли.

Из этих уравнений видно, что пространственное угловое движение КА разделяется на два: плоское движение в канале тангажа и неразделяющееся движение по каналам крена и рыскания.

При переходе в пространство состояний с вектором состояния \vec{x} перепишем систему (3) таким образом, чтобы элементами матрицы M_i в соответствующем канале управления являлись элементы, не относящиеся к этому каналу. Тогда система уравнений (3) распадется на три системы вида:

$$\dot{\vec{x}}_i = \mathbf{A}_i \vec{x}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{M}_i, \quad i = x, y, z \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{i21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ J_{ii} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x}_i = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \dot{\varphi}_i \\ h_i \\ \int_0^t h_i dt \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ m_{i21} \\ m_{i31} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$a_{x21} = \left(\frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \right) \left(\frac{G}{r^3} (1 + e \cos v) + 3 \frac{G}{r^3} \cos^2 \theta_0 \right);$$

$$a_{y21} = \left(\frac{J_{xx} - J_{zz}}{J_{yy}} \right) \left(\frac{G}{r^3} (1 + e \cos v) + 3 \frac{G}{r^3} \sin^2 \theta_0 \right);$$

$$a_{z21} = \frac{3G}{r^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \cos(2\theta_0);$$

$$m_{x21} = - \left(\frac{J_{xx} + J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \right) \sqrt{\frac{G}{r^3}} (1 + e \cos v) \dot{\psi} + \frac{G}{r^3} \left(2e \sin v - 3 \left(\frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \right) \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 + \vartheta \cos 2\theta_0 \right) \right) \psi;$$

$$m_{y21} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy} - J_{zz}}{J_{yy}} \right) \sqrt{\frac{G}{r^3}} (1 + e \cos v) \dot{\gamma} - \frac{G}{r^3} \left(2e \sin v + 3 \left(\frac{J_{xx} - J_{zz}}{J_{yy}} \right) \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 + \vartheta \cos 2\theta_0 \right) \right) \gamma;$$

$$m_{z21} = \frac{3G}{2r^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \sin(2\theta_0) - 2 \frac{G}{r^3} e \sin v;$$

$$m_{x31} = - \sqrt{\frac{G}{r^3}} (1 + e \cos v) h_y;$$

$$m_{y31} = \sqrt{\frac{G}{r^3}} (1 + e \cos v) h_x; \quad m_{z31} = 0.$$

Построение законов управления

В пространстве состояний задача ставится следующим образом. Для линейной динамической системы со многими входами и выходами

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x} + \mathbf{B} \mathbf{u},$$

где \vec{x} — n -мерный вектор, \mathbf{u} — r -мерный вектор входа, матрица $\mathbf{B}(n \times r)$ имеет полный ранг по столбцам, а множество собственных значений матрицы \mathbf{A} равно $\text{eig}(\mathbf{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda_i \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0, i = 1, \dots, n\}$, требуется найти такой закон управления с обратной связью

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \vec{x},$$

где \mathbf{K} — матрица регуляторов по состоянию, чтобы множество собственных значений матрицы замкнутой системы лежало в левой полуплоскости комплексной плоскости.

В данном случае мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{x}}_i &= \mathbf{A}_i \vec{x}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{M}_i, \quad i = x, y, z, \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{K}_i \vec{x}_i \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В канале тангажа система (5) имеет вид:

$$\dot{\vec{x}}_z = (\mathbf{A}_z + \mathbf{B}_z \mathbf{K}_z) \vec{x}_z + \mathbf{M}_z.$$

Рассмотрим случай, когда свободный член в уравнении для канала тангажа равен нулю:

$$m_{z21} = 0, \quad \frac{3G}{2r^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \sin(2\theta_0) - 2 \frac{G}{r^3} e \sin v = 0.$$

Тогда $\theta_0 = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{4}{3} \frac{J_{zz}}{(J_{yy} - J_{xx})} e \sin \nu \right)$ при

$$\text{условии } |\sin \nu| \leq \left| \frac{3(J_{yy} - J_{xx})}{4 J_{zz} e} \right|.$$

Далее будем рассматривать участок траектории в окрестности перигея, где выполняется условие

$$\left| \frac{4}{3} \frac{J_{zz}}{(J_{yy} - J_{xx})} e \sin \nu \right| \leq 1. \quad (6)$$

Для каналов крена и рыскания законы управления ориентацией и разгрузкой в соответствии с работой [10] имеют вид:

$$u_i = K_i \tilde{x}_i + [K_i \quad -E_r] \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ N_i & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = x, y, \quad (7)$$

где E_r — единичная матрица, а $N_i = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$.

Таким образом, системы уравнений для каналов крена, рыскания и тангажа на участке

траектории, где выполняется условие (6), имеют вид:

$$\dot{\tilde{x}}_i = (A_i + B_i K_i) \tilde{x}_i, \quad i = x, y, z, \quad (8)$$

где $K_i = (K_{i1} \ K_{i2} \ K_{i3} \ K_{i4})$.

Для обеспечения асимптотической устойчивости линейной динамической системы с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы спектр собственных значений замкнутой системы лежал в левой полуплоскости комплексной плоскости. В данной работе матрицы A_i систем управлений имеют периодические коэффициенты, а матрицы замкнутых систем $A_i + B_i K_i$ являются матрицами с переменными коэффициентами. В этом случае для обеспечения устойчивости решений систем (8) в работе применялась теорема об асимптотической устойчивости линейной системы с переменными коэффициентами [11].

Для того чтобы применить эту теорему к системам (8), перепишем матрицу системы для каждого канала управления в виде суммы двух матриц: с постоянными $A_{\text{пост}i}$ и переменными коэффициентами $C_i(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}_i = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{i21\pi} - \frac{K_{i1}}{J_{ii}} & -\frac{K_{i2}}{J_{ii}} & -\frac{K_{i3}}{J_{ii}} & -\frac{K_{i4}}{J_{ii}} \\ K_{i1} & K_{i2} & K_{i3} & K_{i4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{\text{пост}i}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{i21\pi} - a_{i21\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_i(t)} \right\} \tilde{x}_i;$$

$$K_{i1} = J_{ii} \left(a_{i21\pi} + \beta_{i1} + \frac{\beta_{i3}}{a_{i21\pi}} \right); \quad K_{i2} = J_{ii} \left(\beta_{i0} + \frac{\beta_{i2}}{a_{i21\pi}} \right); \quad K_{i3} = \frac{\beta_{i2}}{a_{i21\pi}}; \quad K_{i4} = \frac{\beta_{i3}}{a_{i21\pi}};$$

$$\beta_{i0} = -(f_{i0} + f_{i1} + f_{i2} + f_{i3}); \quad \beta_{i1} = f_{i0} f_{i1} + f_{i0} f_{i2} + f_{i0} f_{i3} + f_{i1} f_{i2} + f_{i1} f_{i3} + f_{i2} f_{i3};$$

$$\beta_{i2} = -(f_{i0} f_{i1} f_{i2} + f_{i0} f_{i1} f_{i3} + f_{i0} f_{i2} f_{i3} + f_{i1} f_{i2} f_{i3}); \quad \beta_{i3} = f_{i0} f_{i1} f_{i2} f_{i3}.$$

Здесь K_{ij} — элементы матрицы регуляторов по состоянию в соответствующем канале управления, вычисленные по формулам метода точного размещения полюсов [12], суть которого заключается в том, чтобы заменить спектр значений замкнутой системы на желаемый спектр; f_{ij} — в соответствии с методом точного размещения полюсов, собственные числа матрицы $A_{\text{пост}i}$ (корни характеристического полинома); β_{i0} , β_{i1} , β_{i2} , β_{i3} определяются по формулам, которые выражают коэффициенты многочлена через его корни (формулы Виета); $a_{i21\pi}$ — значение элемента a_{i21} в перигее (при $\nu = 0^\circ$); $i = x, y, z; j = 1, 2, 3, 4$.

Из доказательства теоремы вытекает следующий критерий:

$$4c_{1i} < \min \left| \operatorname{Re} f_{ij} \right|,$$

где c_{1i} — константа, ограничивающая норму матрицы $C_i(t)$ и зависящая только от $A_{\text{пост}i}$; $i = x, y, z$.

В качестве эталонного многочлена, расположение корней которого и является желаемым при замыкании системы с постоянной матрицей $A_{\text{пост}i}$, выбирался полином Баттерворта четвертого порядка, т. е.

$$\min \left| \operatorname{Re} f_{ij} \right| = \rho_{0i} \sin \left(\frac{\pi}{8} \right).$$

Таким образом, для соответствующего канала управления ρ_{0i} — радиус полуокружности в левой полуплоскости с центром в начале координат, на которой лежат корни эталонного многочлена, определяется из условия:

$$\rho_{0i} > \frac{4c_{1i}}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}.$$

Определим значение константы c_{1z} для канала тангажа.

Под нормой матрицы $\mathbf{C}_i(t)$ понимается следующее:

$$\|\mathbf{C}_i(t)\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{z21} - a_{z21\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = |a_{z21} - a_{z21\pi}|;$$

$$|a_{z21} - a_{z21\pi}| = \left| \frac{3G}{r^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \cos(2\theta_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{3G}{r_\pi^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \right| \leq \left| 2 \frac{3G}{r_\pi^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \right|;$$

$$c_{1z} = \left| 6 \frac{G}{r_\pi^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \right|,$$

где r_π — радиус-вектор центра масс КА относительно центра Земли в перигее.

Тогда

$$\rho_{0z} > \frac{24}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} \left| \frac{G}{r_\pi^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} \right) \right|. \quad (9)$$

Действуя аналогичным образом, получим оценки радиусов ρ_{0x} и ρ_{0y} для каналов крена и рыскания, соответственно:

$$\rho_{0x} > \frac{8(4+e)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} \left| \frac{G}{r_\pi^3} \left(\frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \right) \right|; \quad (10)$$

$$\rho_{0y} > \frac{8(4+e)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} \left| \frac{G}{r_\pi^3} \left(\frac{J_{xx} - J_{zz}}{J_{yy}} \right) \right|. \quad (11)$$

Результаты моделирования

Математическое моделирование проводилось в среде *MATLAB* при следующих условиях:

- начальные значения по кинетическому моменту по всем трем каналам управления принимались равными 10 Нмс;
- моделирование проводилось на участке орбиты, где значение истинной аномалии удовлетворяло условию (6);
- значения радиусов полуокружностей, на которых лежат собственные значения постоянных матриц $\mathbf{A}_{\text{пост}}$ для соответствующих каналов управления, выбирались, исходя из ограничений (9–11).

• значения углов отклонения ССК от ОСК по каналам крена и рыскания не превышали 20° , так как система уравнений (3) была получена в предположении малости этих углов. В то же время на угол отклонения в канале тангажа θ это ограничение не накладывалось.

Численным методом определялось значение радиуса окружности по каждому каналу управления, исходя из ограничений (9–11), соответственно. Из всех возможных вариантов значения радиуса окружности в соответствующем канале управления выбиралось такое, при котором приращение кинетического момента было максимально при соблюдении ограничений в 20° на величину углов отклонения ССК от ОСК по каналам крена и рыскания.

Поиск управления по всем трем каналам осуществлялся с использованием выражения (7), в котором в качестве элементов матрицы \mathbf{M} в каналах крена и рыскания брались элементы этих матриц на предыдущем вычислительном шаге. Моделирование объекта управления осуществлялось с использованием динамических уравнений Эйлера (2) и кинематических соотношений в кватернионной форме (1).

Ниже представлены графические результаты моделирования. На рис. 3–5 для каналов крена, рыскания и тангажа представлено по два графика, на верхних — изменение угла отклонения в соответствующем канале в градусах, на нижних — изменение кинетического момента в Нмс по соответствующей оси.

Из рис. 3–5 видно, что кинетический момент КА на участке орбиты в окрестности перигея разгружается, причем по каналам крена и тангажа кинетический момент разгружается полностью. При этом углы отклонения ССК от ОСК по каналам крена и рыскания не превышают 20° .

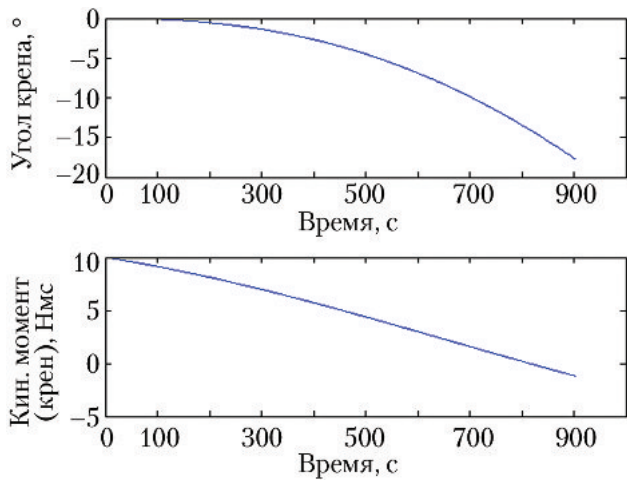


Рис. 3. Изменение кинетического момента инерционных исполнительных органов и угол отклонения в канале крена

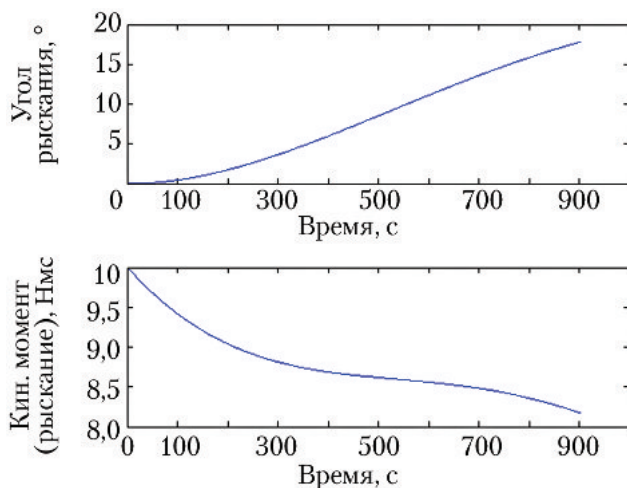


Рис. 4. Изменение кинетического момента инерционных исполнительных органов и угол отклонения в канале рыскания

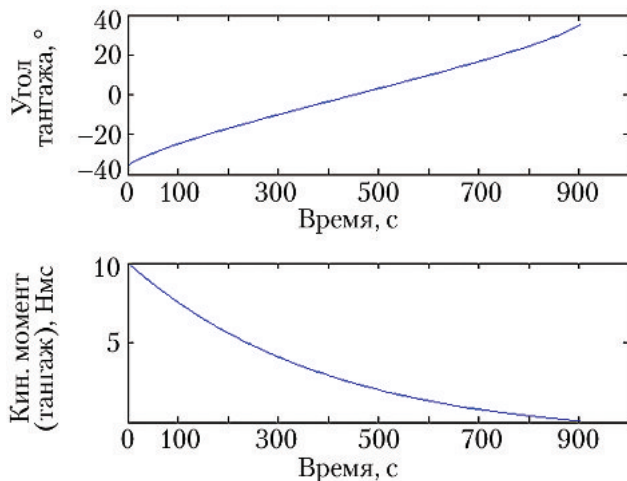


Рис. 5. Изменение кинетического момента инерционных исполнительных органов и угол отклонения в канале тангажа

Заключение

В работе произведен анализ устойчивости решения систем линейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику поведения КА на высокоэллиптической

орбите. Получены численные решения задачи управления ориентацией и разгрузкой кинетического момента КА на высокоэллиптической орбите по всем трем каналам на участке орбиты в окрестности перигея.

Список литературы

1. Платонов В.Н. Одновременное управление движением центра масс и вокруг центра масс при маневрах космических аппаратов на геостационарной и высокоэллиптических орбитах с использованием электроракетных двигателей // Космическая техника и технологии. 2013. № 1. С. 56–65.

2. Воробьева Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А. Безрасходная разгрузка накопленного кинетического момента инерционных исполнительных органов автономного космического аппарата на высокоэллиптической орбите // Инженерный журнал: наука и инновации (электронное научно-техническое издание). Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1072.html> (дата обращения 01.06.2017 г.).

3. Богачев А.В. Управление движением КА «Ямал-100» с использованием светового давления // Ракетно-космическая техника. Труды. Серия XII. Королёв: РКК «Энергия». 2002. Выпуск 1. С. 114–120.

4. Богачев А.В. Управление кинетическим моментом космического аппарата на высокоэллиптической орбите с использованием гравитационного момента и момента сил светового давления // Ракетно-космическая техника. Труды. Серия XII. Королёв: РКК «Энергия». 2010. Выпуск 1. С. 57–60.

5. Браней В.Н. Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем управления. М.: МФТИ, 2009. 304 с.

6. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.

7. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 600 с.

8. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательными аппаратами. М.: МГТУ им. Баумана, 2016. 666 с.

9. Тимаков Н.С. Исследование управляемого углового движения космического аппарата на высокоэллиптической орбите // Сб. трудов IX конференции молодых ученых «Навигация и управление движением», 13–15 марта 2007 г., Санкт-Петербург. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2007. С. 330–336.

10. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

11. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература, 1954. 216 с.

12. Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата / Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 1. С. 92–108.

Статья поступила в редакцию 06.04.2017 г.

Reference

1. Platonov V.N. *Odnovremennoe upravlenie dvizheniem tsentra mass i vokrug tsentra mass pri manevrakh kosmicheskikh apparatov na geostatsionarnoi i vysokoellipticheskikh orbitakh s ispol'zovaniem elektroraketnykh dvigatelei* [Simultaneous control of centre of mass and around centre of mass motion during SC maneuvers performance on geosynchronous and high elliptic orbits using electric rocket engines]. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii*, 2013, no. 1, pp. 56–65.

2. Vorob'eva E.A., Zubov N.E., Mikrin E.A. *Bezrashhodnaya razgruzka nakoplennoho kineticheskogo momenta inertsiionnykh ispolnitel'nykh organov avtonomnogo kosmicheskogo apparata na vysokoellipticheskoi orbite. Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii (elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie)* [Desaturation without propellant consumption of accumulated kinetic momentum of inertial control elements of a spacecraft free-flying in a high elliptical orbit // Engineering journal: science and innovations (electronic science and technology publication)]. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1072.html> (accessed 01.06.2017).

3. Bogachev A.V. *Upravlenie dvizheniem KA «Yamal-100» s ispol'zovaniem svetovogo davleniya* [Controlling the motion of Yamal-100 SC using light pressure]. *Raketno-kosmicheskaya tekhnika. Trudy. Ser. XII. Korolev: RKK «Energiya» publ.*, 2002, issue 1, pp. 114–120.

4. Bogachev A.V. *Upravlenie kineticheskim momentom kosmicheskogo apparata na vysokoellipticheskoi orbite s ispol'zovaniem gravitatsionnogo momenta i momenta sil svetovogo davleniya* [Controlling angular momentum of a spacecraft in high elliptical orbit using gravitational torque and the moment of light pressure force]. *Raketno-kosmicheskaya tekhnika. Trudy. Ser. XII. Korolev: RKK «Energiya» publ.*, 2010, issue 1, pp. 57–60.

5. Branei V.N. *Leksii po teorii besplatformennykh inertsiial'nykh navigatsionnykh sistem upravleniya* [Lectures on the theory of strap down inertial navigation control systems]. Moscow, MIPT publ., 2009. 304 p.

6. Beletskii V.V. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass* [Artificial satellite motion about its center of mass]. Moscow, Nauka publ., 1965. 416 p.

7. Raushenbakh B.V., Tokar' E.N. *Upravlenie orientatsiei kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft attitude control]. Moscow, Nauka publ., 1974. 600 p.

8. Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. *Matrichnye metody v teorii i praktike sistem avtomaticheskogo upravleniya letatel'nyimi apparatami* [Matrix methods in the theory and practice of automatic control systems for flying vehicles]. Moscow, MGTU im. Bauman publ., 2016. 666 p.

9. Timakov N.S. *Issledovanie upravlyаемого uglovogo dvizheniya kosmicheskogo apparata na vysokoellipticheskoi orbite. Sb. trudov IX konferentsii molodykh uchenykh «Navigatsiya i upravlenie dvizheniem»* [A study of controlled angular motion of a spacecraft in a high elliptical orbit. Collected papers of the IX conference of young scientists Navigation and Motion Control]. 13–15 March 2007, Saint-Petersburg. Saint-Petersburg: TsNII «Elektropribor» publ., 2007. Pp. 330–336.

10. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Handbook of automatic control theory]. Ed. A.A. Krasovskiy. Moscow, Nauka publ., 1987. 712 p.

11. Bellman R. *Teoriya ustoichivosti reshenii differentsial'nykh uravnenii* [Theory of stability of differential equations solutions]. Moscow, Inostrannaya literatura publ., 1954. 216 p.

12. Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. *Sintez razvyazyvayushchikh zakonov stabilizatsii orbital'noi orientatsii kosmicheskogo apparata* [Synthesis of uncoupling laws of stabilization of orbital attitude of a spacecraft]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2012, no. 1, pp. 92–108.