

МОДАЛЬНАЯ ДИАГНОСТИКА ПЕРЕХОДНЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ ПРИ ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ ИЗДЕЛИЙ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

© 2016 г. Киренков В.В.¹, Микитенко В.Г.¹, Досько С.И.²

¹Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва (РКК «Энергия») Ул. Ленина, 4А, г. Королёв, Московская обл., Российская Федерация, 141070, e-mail: post@rsce.ru

²Московский государственный технологический университет «СТАНКИН» (МГТУ «СТАНКИН») Вадковский пер., 1, г. Москва, Российская Федерация, 127055

Одной из основных задач технической диагностики при оценке результатов испытаний объектов различного назначения является определение (идентификация) их ключевых параметров и характеристик, сопоставление полученных оценок с расчетными и выявление аномальных (аварийных) расхождений. Об актуальности таких задач говорит тот факт, что им посвящена современная теория решения обратных некорректно поставленных задач, методы которой используются в различных отраслях техники, в т. ч. и ракетно-космической.

При практическом применении этих методов часто возникает вопрос — какие преимущества и трудности сопутствуют решению такого рода обратных задач на переходных неустановившихся режимах? Эти режимы имеют очевидное достоинство — более богатый спектр воздействий, возбуждающих собственные колебания объекта контроля, и соответственно, большая информативность по сравнению с процессами установившимися (вынужденными).

В статье показано, как при всех методических трудностях использование современных методов исследования динамики сложных технических систем позволяет решать упомянутые выше обратные задачи. Основа этих методов — модальная диагностика и сингулярное разложение матриц переходных процессов. Приведены примеры такой диагностики переходных процессов для двух изделий ракетно-космической техники — разгонного блока и спускаемого аппарата.

Ключевые слова: модальная диагностика, переходные режимы, сингулярное разложение, обратные некорректные задачи.

MODAL DIAGNOSTICS OF TRANSIENT PROCESSES DURING EVALUATION OF RESULTS OF TESTS ON ROCKET AND SPACE HARDWARE

Kirenkov V.V.¹, Mikitenko V.G.¹, Dosko S.I.²

¹S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia (RSC Energia) 4A Lenin str., Korolev, Moscow region, 141070, Russian Federation, e-mail: post@rsce.ru

²Moscow State Technological University STANKIN (MSTU STANKIN) 1 Vadkovsky pereulok, Moscow, 127055, Russian Federation

One of the main tasks of technical diagnostics when evaluating the results of tests on hardware for various applications is to determine (identify) their key parameters and characteristics, comparing obtained estimates against design values and identifying anomalous (dangerous) discrepancies. The importance of such tasks is highlighted by the fact that they are addressed by the modern theory of solving inverse ill-posed problems, the methods of which are used in various branches of engineering, including rocket and space technology.

Practical application of these methods often occasions the question of what are the advantages and difficulties inherent in solving inverse problems of this kind on unsteady-state modes? Such processes have an obvious advantage – a richer spectrum of loads exciting natural oscillations of the object under study, and, accordingly, greater amount of information as compared with steady-state (forced) processes.

The paper demonstrates how, all methodological difficulties notwithstanding, the use of the state-of-the-art methods of studying the dynamics of complex engineering systems allows to solve problems of this kind as well. These methods are based on modal diagnostics and singular decomposition of matrices of transient processes. The paper provides examples of such diagnostics of transient processes for two products of rocket and space technology – an upper stage and a descent vehicle.

Key words: modal diagnostics, transient modes, singular decomposition, inverse ill-posed problems.



КИРЕНКОВ В.В.



МИКИТЕНКО В.Г.



ДОСЬКО С.И.

КИРЕНКОВ Вениамин Васильевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник РКК «Энергия», e-mail: post@rsce.ru

KIRENKOV Veniamin Vasil'evich – Candidate of Science (Engineering), Lead research scientist at RSC Energia, e-mail: post@rsce.ru

МИКИТЕНКО Валериан Григорьевич – заместитель начальника отдела РКК «Энергия», e-mail: valerian.mikitenko@rsce.ru

MIKITENKO Valerian Grigor'evich – Deputy Head of Department at RSC Energia, e-mail: valerian.mikitenko@rsce.ru

ДОСЬКО Сергей Иванович – кандидат технических наук, доцент МГТУ «СТАНКИН», e-mail: Dosko@mail.ru

DOSKO Sergey Ivanovich – Candidate of Science (Engineering), Associate professor at MSTU STANKIN, e-mail: Dosko@mail.ru

Введение

При решении задач диагностики большую ценность с информационной точки зрения представляют данные по переходным участкам работы систем в реальных условиях функционирования. Именно на переходных участках в условиях пассивного эксперимента по сравнению с установившимися квазистационарными режимами представляется возможным ставить и решать задачи диагностирования параметров. Необходимость наличия при этом более полной математической модели объекта контроля и более совершенного математического обеспечения решения является одной из причин того, что диагностика таких процессов в штатных режимах часто ограничивается или простым

допусковым контролем, или традиционными спектральными оценками на базе классического преобразования Фурье.

Тем не менее, несмотря на методические трудности, такого рода задачи в последнее время находятся в центре внимания ряда авторов, исследующих возможности их решения как типовых обратных задач [1, 2] с учетом специфики переходных участков [3, 4]. Решения таких задач актуальны для объектов различного назначения, в т.ч. и при оценке испытаний изделий ракетно-космической техники (РКТ), таких как разгонные блоки (РБ) и спускаемые аппараты (СА).

Можно выделить ряд типовых штатных участков для таких изделий, где при всем многообразии и неопределенности

динамических нагрузок воздействия на них носят ударный характер, т.е. близки по своим свойствам к типовой δ -функции произвольной интенсивности. Вследствие этого возбуждаются не вынужденные, зависящие от формы и величины приложенного воздействия, движения, а свободные (собственные) колебания конструкции или системы. Такого типа свободные колебания могут возбуждаться не только в механических системах, но и в более сложных замкнутых системах автоматического регулирования при резких (скачкообразных) изменениях программных параметров, предусмотренных штатной циклограммой. Движения, инициируемые такими изменениями, также можно (конечно, условно) считать свободными колебаниями. Справедливость гипотезы о том, что переходной процесс (в линейной постановке) можно трактовать как свободные колебания, существенно упрощает структуру математической модели таких процессов и делает возможным оценку их параметров даже для систем с ненаблюдаемым входом.

Методология решения задач диагностики как обратных задач подразумевает следующие последовательные этапы:

- построение рабочей математической модели контролируемого процесса или системы с учетом имеющихся измерений, выбор множества базисных функций;
- назначение диагностируемых параметров и характеристик, подлежащих оценке;
- разработка алгоритмов идентификации этих характеристик как обратных задач;
- апробирование выбранных алгоритмов на фактических опытных данных.

В настоящей статье рассматриваются способы реализации такой методологии применительно к участкам свободных колебаний, и приводятся два примера оценки параметров переходных процессов с использованием реальной телеметрической информации (ТМИ), полученной при натурных испытаниях изделий РКТ — один для замкнутой системы автоматического регулирования, второй — для нерегулируемого свободного процесса.

1. Математическая модель и оцениваемые (диагностируемые) показатели

Выбор рациональной математической модели — одна из основных предпосылок успешного решения любой обратной задачи. Математическая модель большинства реальных систем в низкочастотной

области на переходных участках может быть представлена механическим аналогом в виде или сосредоточенных масс, или маятников, соединенных пружинами и снабженных демпферами [4]. Эта модель имеет относительно вектора обобщенных координат q следующую известную форму уравнений:

$$M \frac{d^2q}{dt^2} + H \frac{dq}{dt} + Cq = 0, \quad (1)$$

где M , C и H — матрицы коэффициентов инерции (масс), жесткости и демпфирования, t — время.

Дальнейшее решение таких задач строится на переходе от обобщенных координат q к совокупности нормальных колебаний y_k — так называемых мод, определяемых числом степеней свободы системы s . Справедливость предположения о линейной зависимости сил демпфирования от скоростей изменения \dot{y}_k позволяет, используя методы линейной алгебры, преобразовать (1) в систему p «развязанных» дифференциальных уравнений 2-го порядка [5, 6]:

$$m_k \frac{d^2y_k}{dt^2} + h_k \frac{dy_k}{dt} + c_k y_k = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d^2y_k}{dt^2} + 2\sigma_k \frac{dy_k}{dt} + \omega_{0k}^2 y_k = 0;$$

$$k = 1, 2, \dots, p,$$

где $\sigma_k = \frac{h_k}{2m_k}$ — приведенный коэффициент демпфирования; $\omega_{0k}^2 = \frac{c_k}{m_k}$ — квадрат собствен-

ной частоты консервативной системы с одной степенью свободы; m_k , h_k , c_k — элементы матриц M , H , C .

При малом демпфировании ($\sigma_k < \omega_{0k}$, что имеет место в рассматриваемых ниже практических примерах) решение определяется двумя экспонентами с комплексно-сопряженными показателями $z_{1,2} = -\sigma_k \pm j\omega_{1k}$, где $j = \sqrt{-1}$, $\omega_{1k} = \sqrt{(\omega_{0k}^2 - \sigma_k^2)}$ — условная собственная частота системы с диссипацией σ_k . С учетом формулы Эйлера эти две комплексные моды могут быть преобразованы в одну действительную затухающую по экспоненте гармонику:

$$y_k = A_k e^{-\sigma_k t} \cos(\omega_{1k} t - \theta_k), \quad (3)$$

где амплитуда A_k и фазовый сдвиг θ_k определяются начальными условиями по y_k и \dot{y}_k .

Таким образом, для таких систем принимается, что число комплексных мод p $z_{1,2} = -\sigma_k \pm j\omega_{1k}$ равно удвоенному числу степеней свободы s ($p = 2s$).

К таким математическим моделям [4] может быть сведено описание поведения не только механических, но и целого ряда других систем (например, систем автоматического регулирования), пример чего приведен в разд. 4.

Из соотношения (3) следует, что при анализе таких процессов, в отличие от классических спектральных методов, основанных на преобразовании Фурье, целесообразно принять в качестве аппроксимирующих новый, более совершенный класс базисных функций — модальных, описывающих процесс в терминах собственных частот ω_{1k} и декрементов затухания σ_k . При линейной постановке эти параметры обладают свойством инвариантности относительно начальных условий, возбуждающих свободные колебания. В то же время они функционально связаны с основными приведенными характеристиками k -й степени свободы — массой m , жесткостью c и коэффициентом демпфирования σ (2). Эти свойства и делают целесообразным следующий выбор основных оцениваемых показателей диагностируемого процесса по его собственным колебаниям:

- число действующих мод p (или степеней свободы s);
- собственная частота ω_{1k} и декремент затухания σ_k каждой моды.

Выбор таких оцениваемых показателей имеет также и то преимущество, что соответствующая им форма представления (3) удовлетворяет одному из основных общих требований академика А.Н. Тихонова [1] при решении обратных задач — принадлежности функциональных множеств, в которых ищется решение, к компактным множествам.

2. Методы модального анализа

Записанному в форме действительных данных соотношению (3) при всей его физической наглядности присущ ряд методических трудностей. Одна из них состоит в том, что при его использовании трудно представить выбранные оцениваемые показатели в виде линейных зависимостей от данных измерений, что необходимо для процедуры последующей «алгебраизации» задачи. Именно поэтому при описании вращательных движений и анализе колебательных процессов рекомендуется решать такого рода

задачи в формате не действительных, а комплексных данных [3, 7]. Следуя этой рекомендации, модель каждого контролируемого по ТМИ параметра УП[n], имеющего p комплексных мод, целесообразно представить в следующей форме [3]:

$$\widehat{УП}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}. \quad (4)$$

В этом соотношении $1 \leq n \leq N$ — количество отсчетов опытной функции УП[n] с временным интервалом ΔT . Комплексные параметры h_k и z_k , из которых первый не зависит от времени, а второй — зависит, выражаются через параметры мод следующим образом:

$$\begin{aligned} h_k &= A_k \exp(j\theta_k); \\ z_k &= \exp[(\sigma_k \pm j\omega_{1k})\Delta T]. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом соотношения (4) может быть составлена система линейных условных уравнений, структура которых имеет название матрицы Вандермонты:

$$\begin{vmatrix} z_1^0 = 1 & z_2^0 = 1 & \dots & z_p^0 = 1 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{УП}[1] \\ \text{УП}[2] \\ \dots \\ \text{УП}[N] \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где $Z[N \times p]$; $h[p \times 1]$; УП[$N \times 1$] — матрица и векторы соответствующих размерностей, при этом элементы $Z[N \times p]$ и $h[p \times 1]$ представлены в комплексной форме (5). Вектор УП[$N \times 1$] представляет фактические, а не модельные (4) данные.

Нетрудно видеть, что если вместо комплексных параметров z_k и h_k прибегнуть к представлению ожидаемого решения в форме действительных данных (3), то сформировать линейные соотношения типа (4, 6) не представится возможным.

После того, как выбрана математическая модель изучаемого процесса, решение обратной задачи диагностики может быть сформулировано как экспоненциальная аппроксимация (или по выражению в работе [3], «подгонка») опытной функции УП[n] аналитическими выражениями типа (4, 5). Стандартный путь решения такой задачи — формирование квадратичного функционала невязок ρ между опытными и модельными значениями УП и его последующая минимизация методом наименьших квадратов (МНК):

$$\rho = \sum_{n=1}^N \left\{ \text{УП}[n] - \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} \right\}^2. \quad (7)$$

При известном значении p и матрицы $Z[N \times p]$, содержащей переменные по времени элементы z_k , соотношения (6, 7) определяют систему так называемых нормальных уравнений МНК:

$$(Z^T Z)h = Z^T УП \quad (8)$$

или с учетом комплексного задания элементов матрицы Z [3]:

$$(Z^H Z)h = Z^H УП, \quad (9)$$

где $Z^H(P \times N)$ – эрмитово-сопряженная матрица, определяемая параметрами z_k ; H – символ эрмитовой сопряженности (в отличие от операции транспонирования).

В отличие от принятой классической постановки задачи в форме метода наименьших квадратов (8, 9), где считаются заданными элементы матрицы плана Z и ее размерность $N \times P$, в рассматриваемом случае известна только принятая структура ее элементов (5). Ввиду этого решение уравнения (9) требует как определения элементов матрицы Z^H , содержащих выбранные оцениваемые показатели σ_k и ω_{1k} , так и реального числа мод p . Необходимость решения такой проблемы привела к раз-

работке процедуры, получившей название обобщенного метода Прони (по имени французского математика). В основу этого метода положен переход от экспоненциального метода аппроксимации (4, 5) со всеми его трудностями к линейному [3].

Принятая модель экспоненциальных, зависящих от времени параметров z_k ($1 \leq k \leq p$) в виде затухающих по экспоненте гармоник (3), и возможность представления в этом же классе функций и их производных \dot{y}_k позволяют выразить решение для z_k в виде корней некоторого алгебраического полинома $\Phi(z)$, имеющего в дискретном виде форму интеграла свертки:

$$\Phi(z) = a[0]z^p + a[1]z^{p-1} + \dots + a[p] = \sum_{m=0}^p a[m]z^{p-m} = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты $a[m]$ при старшем члене $a[0] = 1$ и известном p могут быть определены путем процедуры факторизации исходного множества УП[n] по матричному уравнению предсказания вперед

$$УП / \ker f[n - m],$$

где $f[n - m] = \sum_{m=0}^p a[m]УП[n - m]$ [3]:

$$\begin{vmatrix} УП[p] & УП[p-1] & \dots & УП[1] \\ УП[p+1] & УП[p] & \dots & УП[2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ УП[2p-1] & УП[2p-2] & \dots & УП[p] \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \dots \\ a[p] \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} УП[p+1] \\ УП[p+2] \\ \dots \\ УП[2p] \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Матричное уравнение (11) при минимально необходимом числе отсчетов $N = 2p$ позволяет, таким образом, определить требуемый набор коэффициентов линейной аппроксимации $a[m]$. В переопределенном случае, когда $N \geq 2p$, для решения этого уравнения требуется применение стандартной процедуры МНК, что дает следующие выражения для значений коэффициентов полинома $a = (a[1], a[2], \dots, a[p])^T$:

$$a = (A^T A)^{-1} A^T УП, \quad (12)$$

где $A(2N - 1 - P \times P)$ – переходная, теперь переопределенная матрица, форма которой в линейной алгебре называется Тёплицева матрица :

$$A = \begin{vmatrix} УП[p] & УП[p-1] & \dots & УП[1] \\ УП[p+1] & УП[p] & \dots & УП[2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ УП[2N-1] & УП[2N-2] & \dots & УП[2N-p] \end{vmatrix} \quad (13)$$

Характерной особенностью таких матриц является идентичность ее элементов по любой диагонали. Подлежащий определению вектор коэффициентов $a = (a[1], a[2], \dots, a[p])^T$ в переопределенном случае носит название подвижного окна [3].

В качестве примера рассмотрим, как будет выглядеть уравнение этой процедуры для системы с двумя степенями свободы ($p = 4$) после перехода к методу наименьших квадратов (12). Этот пример (14) выбран потому, что, как известно [8, 12], максимальная степень полинома, допускающего аналитическое решение, равна 4.

При $p > 4$ (число степеней свободы больше двух) приходится прибегать к численным методам решения, с чем, в частности, пришлось столкнуться и при решении рассмотренного ниже второго примера.

$$\begin{pmatrix} \sum_4^{N-1} \text{УП}^2[i] & \sum_4^{N-1} \text{УП}[i]\text{УП}[i-1] & \sum_4^{N-1} \text{УП}[i]\text{УП}[i-2] & \sum_4^{N-1} \text{УП}[i]\text{УП}[i-3] \\ \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-1]\text{УП}[i] & \sum_4^{N-1} \text{УП}^2[i-1] & \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-1]\text{УП}[i-2] & \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-1]\text{УП}[i-3] \\ \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-2]\text{УП}[i] & \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-2]\text{УП}[i-1] & \sum_4^{N-1} \text{УП}^2[i-2] & \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-2]\text{УП}[i-3] \\ \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-3]\text{УП}[i] & \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-3]\text{УП}[i-1] & \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-3]\text{УП}[i-2] & \sum_4^{N-1} \text{УП}^2[i-3] \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ a[3] \\ a[4] \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_4^{N-1} \text{УП}[i]\text{УП}[i+1] \\ \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-1]\text{УП}[i+1] \\ \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-2]\text{УП}[i+1] \\ \sum_4^{N-1} \text{УП}[i-3]\text{УП}[i+1] \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Теперь, когда определены коэффициенты линейной аппроксимации $a[1], \dots, a[p]$, может быть осуществлено решение алгебраического уравнения свертки (10) — определение корней этого уравнения z_k . Эта процедура исходит из возможности представления этого уравнения в виде произведения элементарных множителей, каждый из которых соответствует характеристическому уравнению k -ой моды:

$$\Phi(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p) = \prod_{k=1}^p (z - z_k). \tag{15}$$

Поскольку у многочлена $\Phi(z)$ все коэффициенты вещественны, он может иметь только четное число мнимых корней. При этом каждому корню $(x_0 + iy_0)$ обязательно соответствует ему сопряженный $(x_0 - iy_0)$. Благодаря этому в разложении (15) два множителя с мнимыми коэффициентами можно заменить одним с вещественными коэффициентами, но со второй степенью переменного z . Это соответствует аналогичным преобразованиям двух комплексно-сопряженных мод (3), сделанным в разд. 1. Таким образом, учитывая, что p — четно, соотношение (15) может быть представлено как

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{p/2} (z^2 + a_{1k}z + a_{2k}) = 0. \tag{16}$$

Его можно трактовать теперь как написанное не для p мод, а для $p/2$ числа степеней свободы.

Используя стандартные процедуры Z -преобразования [9–11] для затухающих гармонических функций $y_k = e^{-\sigma_k t} \sin(\omega_{1k} t)$; $y_k = e^{-\sigma_k t} \cos(\omega_{1k} t)$, выбранные выше основные показатели — декремент затухания σ_k и частота ω_k — могут быть следующим образом выражены через коэффициенты a_{1k} и a_{2k} характеристического уравнения (16):

$$a_{1k} = -2d_k \cos \omega_k \Delta T; \quad a_{2k} = d_k^2; \quad d_k = e^{-\sigma_k \Delta T} \tag{17}$$

или следующими выражениями для вещественной и мнимой частей корня z_k [3]:

$$\begin{aligned} \text{Re } z_k &= -\frac{a_{1k}}{2}; \\ \text{Im } z_k &= \sqrt{\frac{a_{1k}^2}{4} - a_{2k}}; \\ \sigma_k &= \frac{\ln |z_k|}{\Delta T}; \\ \omega_k &= \text{arctg} \left(\frac{\text{Im } z_k}{\text{Re } z_k} \right) \frac{1}{\Delta T}. \end{aligned} \tag{18}$$

После определения комплексных параметров $z_k (1 \leq k \leq p)$ решение уравнения (8) для констант $h_k = A_k \exp(j\theta_k)$ также должно производиться в комплексной области. Аналогично (11) будем иметь:

$$(Z^H Z)h = Z^H \text{УП}. \tag{19}$$

Начальная амплитуда колебаний k -ой моды A_k и соответствующий фазовый сдвиг θ_k определяются теперь следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} A_k &= |h_k|; \\ \theta_k &= \text{arctg} \left[\frac{\text{Im}(h_k)}{\text{Re}(h_k)} \right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, процедуру Прони можно представить состоящей из следующих последовательных этапов:

1. При выбранном значении p , определяющем размерность подвижного окна, составляется условное матричное уравнение (11) с возможно большей избыточностью матрицы $A (m = 2N - 1 \gg p)$, что, как следует из элементарной теории МНК, способствует повышению точности оценок (уменьшению их дисперсии).

2. Переходом к нормальным уравнениям по соотношениям (12, 13) определяется вектор коэффициентов линейной аппроксимации $a = (a[1], a[2], \dots, a[p])^T$.

3. Определяются комплексные корни z_k и соответствующие им параметры k -ой моды — декремент затухания σ_k и частота ω_k (17, 18).

4. Используя, как и выше, МНК, но теперь уже в комплексной эрмитово-сопряженной форме, решается уравнение (9) относительно не зависящих от времени констант h_k , и определяются по соотношениям (19, 20) начальная амплитуда колебаний k -й моды A_k и фазовый сдвиг θ_k .

Необходимые для вычислений по п. 1–4 подпрограммы *TOEPLITZ*, *CPOLY*, *COVAR* и *EXPARAMS* на языке ФОРТРАН приведены в работе [3].

Однако уже на первом и втором этапах этих процедур может возникнуть одна из серьезных проблем линейной алгебры — проблема обусловленности. Как указывает ряд авторов [9, 12], «есть серьезные фундаментальные доводы против использования таких нормальных уравнений МНК» без оценки реальной обусловленности матрицы $cond(A)$. Практические методы решения этой проблемы рассматриваются ниже.

3. Оценка числа степеней свободы (реально действующих мод)

Обычно числа степеней свободы определяются из физических соображений. Так, при свободном неуправляемом движении твердого тела число вращательных степеней свободы s принимается равным трем [14], а соответствующее число комплексных мод равным $p = 2 \cdot 3 = 6$. При управляемом вращательном движении изделий типа ракетных блоков (пример, рассмотренный в разд. 4) число степеней свободы по каждому каналу стабилизации может быть принято равным двум — одна стабилизируемая и одна управляющая координаты. Однако, как подчеркнуто выше, целесообразно иметь математический аппарат, позволяющий подтвердить соответствие выбранного и фактически реализованного числа мод (степеней свободы).

Прямой путь оценки обусловленности матрицы A и соответствующей квадратной матрицы МНК $A^T A$ (12) путем вычисления определителей «может оказаться непростым делом» [9] ввиду значительных вычислительных трудностей. Поэтому для задач, где требуется не фактическое значение определителя, а лишь указание на его близость к нулевому значению, целесообразно использовать

другие подходы. Из существующих, обычно рекомендуемых методов решения такого рода задач остановимся на двух — *методе сингулярного разложения переходной матрицы (SVD)* и *методе невязок*. Оба этих метода, рекомендованные, например, в работе [3], основаны на аналогичном принципе — на регистрации резкого изменения каких-либо показателей, функционально связанных с ее обусловленностью $cond(A)$. Дадим краткое изложение этих методов.

Методология SVD заключается в представлении исходной переходной матрицы $A(m \times n)$ в виде произведения трех матриц $A = USV^T$, где U — ортогональная матрица размера $m \times m$, V — ортогональная матрица размера $n \times n$, а S — матрица исходного размера $m \times n$, имеющая специфическую диагональную форму. На главной диагонали этой матрицы находятся числа, имеющие только неотрицательные значения ($\sigma_i \geq 0$) и расположенные в невозрастающем порядке до номера r ($\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r, r \leq n$ и $\sigma_{r+1} \dots \sigma_n = 0$). Числа σ_i и есть сингулярные, а их количество, имеющее ненулевые значения, равно рангу r матрицы A .

Матрица $S(m \times n)$ сингулярного разложения матрицы (11), если она неполного ранга r , может быть представлена в следующем клеточном виде:

$$S = \begin{vmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (21)$$

где $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, r \leq n)$ — диагональная $r \times r$ матрица.

Использование метода сингулярного разложения может быть основано на следующей особенности условного уравнения (11). Если фактическое число реально действующих мод и выбранная размерность подвижного окна составляет p , то ее увеличение до $p+1$ приводит к «вырожденности» (неполному рангу) матрицы A , так как введенный в нее при этом дополнительный вектор — столбец $(УП[p+1], УП[p+2], \dots, УП[2M])^T$ — оказывается, как это следует из того же (10), линейно зависимым от остальных столбцов матрицы. Появление при такой многошаговой процедуре малых сингулярных чисел σ_i и резкого увеличения («скачка») числа обусловленности матрицы A — $cond(A) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ [12] позволяет сделать вывод о переходе матрицы A в состояние, близкое к неполному рангу. Другими словами, ищется момент перехода

матрицы S из состояния $S = \begin{vmatrix} D \\ 0 \end{vmatrix}$ в состояние, близкое к (21).

Программы сингулярного разложения (SVD) есть в ряде современных специализированных программных продуктов, ориентированных на решение математических задач (например, *MathCAD*). На их выходе и формируются три матрицы: S , U , V .

Второй из упомянутых методов определения реального ранга переходной матрицы – метод невязок, рекомендованный в работах [3, 8], близок по смыслу к первому. Он, как и первый, основан на последовательном увеличении размерности подвижного окна коэффициентов линейной аппроксимации $a = (a[1], a[2], \dots, a[p])^T$, вычислении соответствующих значений УП[i] и их невязок $e = \text{УП}[i] - \widehat{\text{УП}}[i]$ и регистрации резкого уменьшения нормы этих невязок.

Выбрав в качестве нормы квадратичную ошибку E , будем иметь в соответствии с методологией МНК следующее выражение для $\|e\|$ [3]:

$$E = e^T e = \text{УП}^T \text{УП} - \text{УП}^T \widehat{\text{УП}} = \text{УП}^T \text{УП} - \text{УП}^T Z h. \quad (22)$$

Как нетрудно убедиться, соотношение (22) дает в результате скаляр, характеризующий обобщенную квадратичную ошибку аппроксимации при выбранном p .

4. Оценка параметров типовых переходных процессов по данным ТМИ разгонных блоков ДМ-SL и спускаемого аппарата изделия 11Ф732

В данном разделе приведены примеры оценки характеристик переходных неустойчивых процессов по материалам летных испытаний РБ ДМ-SL и спуска СА изделия 11Ф732. Принято, что эти процессы можно трактовать как свободные колебания в условиях реальной штатной эксплуатации.

В первом примере число степеней свободы, равное двум, принималось, исходя из приведенной на рис. 1 блок-схемы системы угловой стабилизации одного из российских разгонных блоков. Эта типовая классическая блок-схема угловой стабилизации ракет-носителей, приведенная, например, в работе [13], по структуре имеет два функционально связанных контура. Внешний, включающий объект стабилизации, имеет следующие основные параметры: коэффициент усиления автомата стабилизации (АС) по углу отклонения РБ a_0 (град/град); приведенное опережение АС с учетом динамического запаздывания $\tau_{оп.п} = \tau_{оп} - \tau_{зап}$ (с); эффективность управляющих

органов стабилизации $C_{98} (1/c^2)$. Основные параметры внутреннего контура рулевого механизма (РМ): скоростная характеристика РМ $K_{РМ}$ (град/с/мА); коэффициент усиления РМ по обратной связи $K_{ос}$ (мА/град); динамическое запаздывание контура РМ $T_{ос}$ (с); зона нечувствительности РМ – нелинейный элемент, мА.

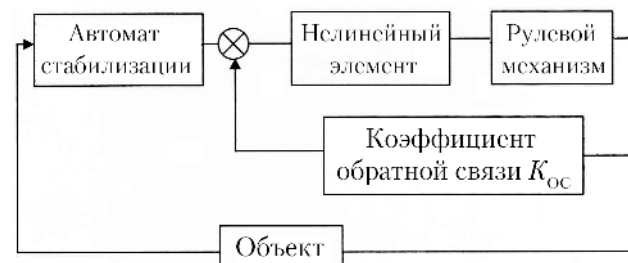


Рис. 1. Блок-схема системы угловой стабилизации разгонного блока

Примеры переходных процессов в такой системе – ТМИ по углам поворота РМ с потенциометров обратной связи в плоскости тангажа (параметры ПОСТ) для двух РБ ДМ-SL – № 7 и 8 – приведены на рис. 2.

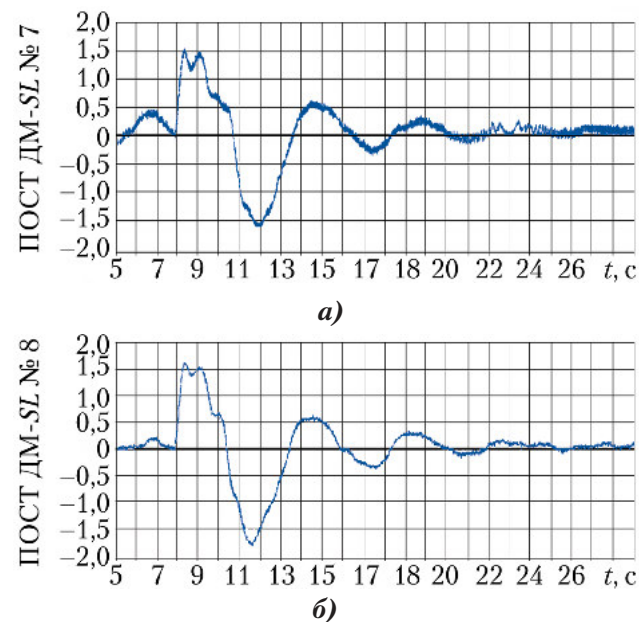


Рис. 2. Переходные процессы в системе стабилизации разгонного блока: а – для ДМ-SL № 7; б – для ДМ-SL № 8

Примечание. ПОСТ – потенциометр обратной связи по тангажу.

Эти процессы вызваны обработкой бортовой программы терминального наведения, которая через ~8 с после запуска маршевого двигателя формирует новые программные значения угла ν и угловой скорости $\dot{\nu}$ по каналу тангажа. Ввиду практически скачкообразного характера таких изменений реакцию на них системы угловой стабилизации можно трактовать как близкую к свободным колебаниям.

На рис. 2 были даны примеры переходных процессов на активных участках ракетного блока ДМ-SL. Аналогичного рода неустановившиеся процессы можно привести и на штатных режимах другого изделия ракетно-космической техники – СА изделия 11Ф732. На рис. 3 приведены примеры переходных процессов по угловым скоростям (по каналам тангажа – УСТ1 и рыскания – УСР1) на участке спуска одного из СА (№ 225). Это участок перецепки основной парашютной системы на симметричную подвеску.

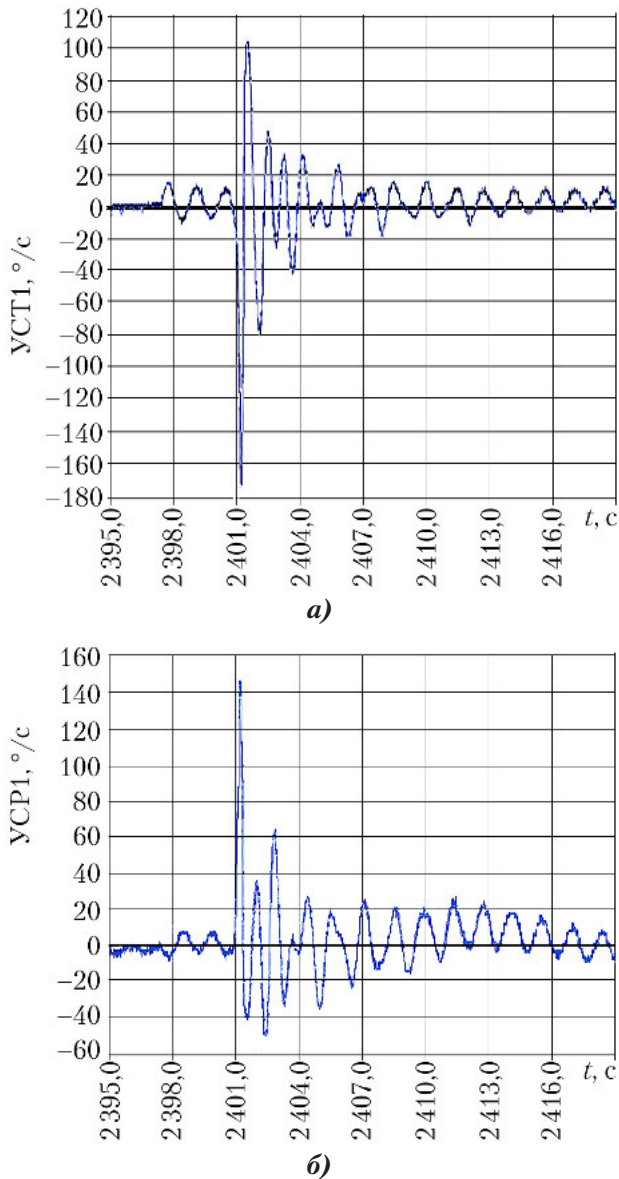


Рис. 3. Угловые скорости спускаемого аппарата при перецепке основной парашютной системы: а – по каналам тангажа; б – по каналам рыскания

Примечание. УСТ1, УСР1 – угловые скорости тангажа и рыскания, соответственно.

На этом участке число степеней свободы, принятых из физических соображений, как указывалось выше, может быть принято рав-

ным трем [14]. Для подтверждения это число было оценено и по рекомендованной выше опытной зависимости (22) изменения нормы невязок $\|\rho_{p+1} - \rho_p\|$ и их градиента от p . Данные по этой зависимости, приведенные в относительных величинах (%) от дисперсии исходного процесса, даны на рис. 4.

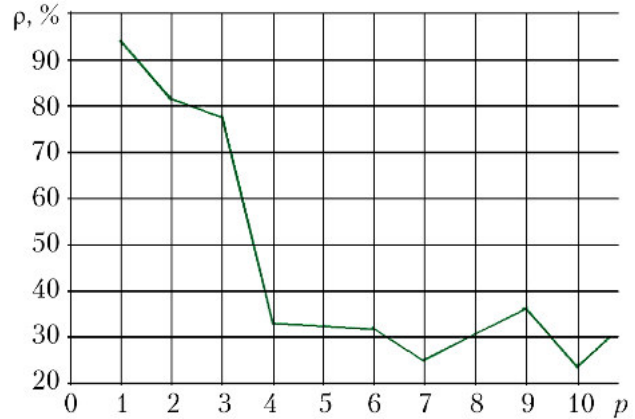


Рис. 4. Зависимость нормы невязок ρ от числа степеней свободы p

Они свидетельствуют о резком изменении градиента нормы невязок примерно в районе числа p , равного 3–4, что соответствует их ожидаемому, принятому выше (из физических соображений), значению.

В отличие от второго примера, в первом (см. рис. 1, 2) такого соответствия между ожидаемым и фактически реализованным числом мод не установлено. Матрица переходных процессов (14), сформированная для таких систем с ожидаемым числом степеней свободы $s = 2$ ($p = 4$), оказывается близкой к вырожденной. Это говорит о том, что здесь как раз имеет место случай, рассмотренный выше в разделе 3. Из-за близости к нулю начальных условий по второй моде (контур РМ) и наличия нелинейного элемента, из ожидаемых двух практически реализовались только параметры первой основной моды (объект стабилизации). Они примерно составляют:

$$\sigma_1 \approx -(0,15 \div 0,20) \text{ с}; \omega_1 \approx 0,19 \div 0,20 \text{ Гц.}$$

Полученные значения ω и σ находятся в соответствии с расчетным характеристическим уравнением этой основной моды:

$$Z^2 + \frac{a_0}{K_{OC}} \tau_{оп.п} C_{06} Z + \frac{a_0}{K_{OC}} C_{06} = 0.$$

Для малого контура РМ это уравнение (без учета нелинейного элемента) имеет вид:

$$Z^2 + \frac{1}{T_{OC}} Z + \frac{K_{PM} K_{OC}}{T_{OC}} = 0.$$

Модальная диагностика переходных процессов при перецепке основной парашютной системы (рис. 3) при принятом (равном трем) числе доминирующих степеней свободы ($p = 6$) дает следующие оценки их характеристик:

$$\sigma_1 \approx -(0,06 \div 0,09)1/c;$$

$$\omega_1 \approx 0,7 \div 0,72 \text{ Гц};$$

$$\sigma_2 \approx -(0,30 \div 0,35)1/c;$$

$$\omega_2 \approx 1,18 \div 1,20 \text{ Гц};$$

$$\sigma_3 \approx -(1,45 \div 1,55)1/c;$$

$$\omega_3 \approx 1,40 \div 1,50 \text{ Гц}.$$

О достоверности приведенных характеристик может говорить близость оценок реального числа степеней свободы, равного трем, полученных как из физических предпосылок, так и методом сопоставления норм невязок (22).

Заключение

Статья посвящена методам решения одной из актуальных задач, возникающих при диагностике состояния динамических систем — оценке характеристик переходных неустановившихся процессов в реальных режимах эксплуатации. Показано, что в случаях, когда представляется возможным трактовать информацию по этим режимам как свободные колебания, возможно и целесообразно ее использовать для идентификации этих характеристик.

Предлагаемые методы решений таких задач основаны на современных информационных подходах — модальной диагностике и, при необходимости, сингулярном разложении матриц переходных процессов. Дан анализ принципиальных особенностей этих подходов как с методической, так и с вычислительной точек зрения. Приведены практические примеры оценки такого рода переходных процессов при выведении разгонных блоков ДМ-SL и посадке спускаемого аппарата 11Ф732. Полученные результаты свидетельствуют о принципиальной возможности использования на практике рассмотренной в статье методологии.

В то же время авторы обращают внимание на то, что некоторые методические вопросы могут потребовать дополнительной проработки. Это необходимость доработки классической вычислительной схемы МНК в связи с мультипликативным характером влияния ошибок измерений, более обоснованный выбор частоты опроса опытных данных, отсутствие свойства ортогональности базовых функций и т. д.

Расчеты производились с использованием программного математического обеспечения, разработанного и внедренного в практические работы по модальной диагностике аспирантом МГТУ «СТАНКИН» Е.В. Югановым.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 286 с.
 2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
 3. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
 4. Балакишин О.Б., Кухаренко Ю.Г. Модальная вибродиагностика систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1996. № 5. С. 116–122.
 5. Неразрушающие испытания. Справочник в 2 т. М.–Л.: Энергия, 1965.
 6. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. М.: Машиностроение, 1978–1981. Т. 1. 504 с. Т. 5. 500 с.
 7. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 440 с.
 8. Киренков В.В., Досько С.И. Типовые обратные задачи и методы их решения при оценке результатов испытаний изделий РКТ // Ракетно-космическая техника. Труды. Сер. XII. Вып. 3. Королёв: РКК «Энергия», 2014. 100 с.
 9. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.
 10. Меньшиков В.А., Гришин В.Н., Киренков В.В., Коврижский В.Д. Определение и идентификация импеданса электрохимических систем. М.: Изд-во НИИ КС, 2008. 248 с.
 11. Хитрик М.С., Федоров С.М. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами. М.: Машиностроение, 1972. 231 с.
 12. Форсайт Д., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
 13. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
 14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 215 с.
- Статья поступила в редакцию 18.02.2016 г.

Reference

1. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka publ., 1986. 286 p.
2. *Kabanikhin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo publ., 2009. 457 p.
3. *Marpl S.L. Tsifrovoye spektral'nyi analiz i ego prilozheniya* [Digital spectral analysis and its applications]. Moscow, Mir publ., 1990. 584 p.
4. *Balakshin O.B., Kukhareno Yu.G. Modal'naya vibrodiagnostika sistem* [Modal vibration diagnostics of systems]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 1996, № 5, pp. 116–121.
5. *Nerazrushayushchie ispytaniya. Spravochnik in 2 vol.* [Non-destructive testing. Handbook of 2 vol.]. Moscow–Leningrad, Energiya publ., 1965.
6. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik in 6 vol.* [Vibrations in machinery. Handbook of 6 vol.]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1978–1981. Vol. 1, 504 p. Vol. 5, 500 p.
7. *Strelkov S.P. Vvedenie v teoriyu kolebaniy* [Introduction to the theory of vibrations]. Moscow, Nauka publ., 1964. 440 p.
8. *Kirenkov V.V., Dos'ko S.I. Tipovye obratnye zadachi i metody ikh resheniya pri otsenke rezul'tatov ispytaniy izdeliy RKT* [Typical inverse problems and their solution methods during the evaluation of the test results of RST products]. *Raketno-kosmicheskaya tekhnika. Trudy. Ser. XII. Korolev: RKK «Energiya» publ.*, 2014, issue 3, 100 p.
9. *Faddeev D.K. Lektsii po algebra* [Lectures on algebra]. Moscow, Nauka publ., 1984. 416 p.
10. *Men'shikov V.A., Grishin V.N., Kirenkov V.V., Kovrizhkin V.D. Opredelenie i identifikatsiya impedansa elektrokhimicheskikh system* [Definition and identification of electrochemical system impedance]. Moscow, NII KS publ., 2008. 248 p.
11. *Khitrik M.S., Fedorov S.M. Dinamika sistem upravleniya raket s bortovymi tsifrovymi vychislitel'nymi mashinami* [Dynamics of missile control systems with onboard digital computers]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1972. 231 p.
12. *Forsait D., Mal'kol'm M., Mouler K. Mashinnye metody matematicheskikh vychislenii* [Machine methods for mathematical calculations]. Moscow, Mir publ., 1980. 280 p.
13. *Kolesnikov K.S. Dinamika raket* [Dynamics of missiles]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1980. 376 p.
14. *Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. Vol. 1. Mekhanika* [Theoretical physics. Vol. 1. Mechanics]. Moscow, Nauka publ., 1988. 215 p.